Бібліотека журналу «Математика в школах України»
Заснована 2003 року

Випуск 8 (68)

О. Ю. Харік

МАТЕРІАЛИ
для факультативних занять, спецкурсів, гуртків
МАТЕМАТИКА
5–7

Харків
Видавнича група «Основа»
2008

УДК 51
ББК 22.1
Х20

Харік О. Ю.

Х20 Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5–7. — Х. : Вид. група «Основа», 2008. — 143, [1] с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 8 (68)).

ISBN 978-966-333-937-5.

Пропонований посібник містить матеріали для проведення факультативних занять, спецкурсів, гуртків з математики у 5–7 класах.

Для вчителів математики загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

УДК 51
ББК 22.1

Навчальне видання

ХАРІК Олена Юхимівна

МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ, СПЕЦКУРСІВ, ГУРТКІВ. МАТЕМАТИКА 5–7

Навчально-методичний посібник

Головний редактор *І. С. Маркова*
Редактор *Г. О. Біловол*
Коректор *О. М. Журенко*
Комп'ютерна верстка *О. В. Лєбєдєва*

Підп. до друку 8.08.2008. Формат 60×90/16. Папір газет.
Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 9,0. Зам. № 8-08/18-04.

ТОВ «Видавнича група "Основа"».
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи КВ № 1390-263Р від 26.06.2006.
Україна, 61001 Харків, вул. Плеханівська, 66. Тел. (057) 731-96-33

Віддруковано з готових плівок ПП «Тріада+»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1870 від 16.07.2007.
Харків, вул. Киргизька, 19. Тел.: (057) 757-98-16, 757-98-15.

ISBN 978-966-333-937-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонована книга написана на основі багаторічного досвіду викладання математики у фізико-математичному ліцеї № 27 м. Харкова. Посібник, містить матеріал, який допоможе вчителю в підготовці та проведенні факультативних занять, спецкурсів, гуртків з математики для учнів 5–7 класів. Книга складається із чотирьох розділів: «Лінійні рівняння з однією змінною», «Функції та графіки», «Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними», «Основи теорії подільності» та містить основні теоретичні відомості із зазначених тем, приклади розв'язання типових завдань, завдання для самостійного розв'язування, завдання для самоперевірки, тексти контрольних робіт.

До посібника включено матеріал, присвячений розв'язанню лінійних рівнянь та систем лінійних рівнянь з параметрами, побудові графіків функцій, що містять модулі. Розглянуто означення, властивості та графіки цілої й дробової частин числа. Корисним та цікавим є розділ, присвячений теорії подільності. У ньому розглядаються основні теоретичні положення про подільність чисел, подається означення конгруенції за модулем, доводяться теореми, що виражають властивості конгруенцій.

Автор сподівається, що пропонований посібник стане у пригоді вчителям під час проведення уроків, факультативних занять та гуртків, сприятиме формуванню в учнів навичок розумової праці.

Розділ I. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

§ 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Найпростіші рівняння з модулем

Розв'язування багатьох задач практичного змісту приводить до складання рівнянь, які після спрощення мають вигляд: $ax=b$, де a і b деякі числа, x – змінна. Такі рівняння називаються лінійними.

Задача. За олівець і зошит заплатили 90 к. Зошит дорожчий за олівець на 40 к. Скільки коштує зошит?

Розв'язання

Нехай зошит коштує x к., тоді олівець коштує $(x-40)$ к. За умовою задачі складаємо рівняння:

$$x+(x-40)=90,\ 2x-40=90,\ 2x=130,\ x=65.$$

Відповідь. 65 к.

Розв'язування рівнянь виду $a\cdot|x|=b$, де a і b – деякі числа, $a\neq 0$

Пригадаємо означення модуля числа та його геометричний зміст.

Модулем невід'ємного числа є це саме число, модулем від'ємного числа є протилежне до нього число:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Модуль числа – це відстань від початку відліку до точки, що зображує число на координатній прямій. Наприклад, $|-3|=3$, оскільки відстань від точки A, що зображує число (-3) на координатній прямій, до початку відліку дорівнює 3 (*рис. 1*).

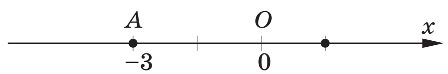


Рис. 1

Модуль будь-якого числа набуває тільки невід'ємних значень:

$$|5|=5,\ |-7|=7,\ |0|=0.$$

Відстань між точками $A(a)$ і $B(b)$ на координатній прямій – це модуль різниці чисел a і b: $AB=|a-b|$.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x|=-2$.

Розв'язання

Оскільки модуль будь-якого числа є число невід'ємне, а $-2<0$, то рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

б) $|x|=5$.

Розв'язання

I спосіб. Згідно з геометричним змістом модуля числа, на координатній прямій знаходимо точки, відстань від яких до початку відліку дорівнює 5. Це точки з координатами −5 і 5 (*рис. 2*).

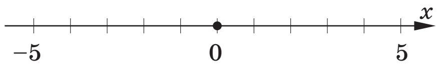


Рис. 2

II спосіб (аналітичний). За означенням модуля: $x=5$ або $-x=5$, тобто числа 5 і −5 –корені рівняння.

Відповідь. −5; 5.

в) $2|x|=3$.

Розв'язання

Розділимо обидві частини рівняння на 2: $|x|=1{,}5$.

На координатній прямій знаходимо точки, відстань від яких до початку відліку дорівнює 1,5. Це точки з координатами −1,5 і 1,5.

Відповідь. −1,5; 1,5.

г) $|x|=0$.

Розв'язання

Єдиною точкою на координатній прямій, яка віддалена від початку відліку на відстань, що дорівнює нулю, є точка з координатою 0.

Відповідь. 0.

Розв'язування рівнянь виду $|x-a|=b$ і $|ax-b|=c$, де a, b, c – деякі числа, $a\neq 0$

Розв'яжемо рівняння $|x-a|=b$.

Нехай $b\geq 0$ (ми вже знаємо, що при $b<0$ рівняння $|x-a|=b$ коренів не має). Тоді для розв'язування рівняння $|x-a|=b$ потрібно знайти такі точки на координатній прямій, які від точки з координатою a знаходяться на відстані, що дорівнює b.

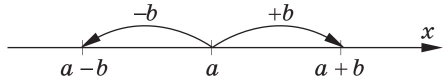


Рис. 3

Рівняння $|x-a|=b$ можна розв'язати і аналітичним способом. За означенням модуля: $|x-a|=x-a$ або $|x-a|=-(x-a)$. Тобто $x-a=b$ або $-(x-a)=b$. Отже, $x=a+b$ або $x=a-b$ – корені рівняння $|x-a|=b$.

Відповідь. $a-b$; $a+b$.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x-2|=3$.

Розв'язання

Знайдемо на координатній прямій точки, що знаходяться на відстані 3 від точки з координатною 2 (*рис. 4*).

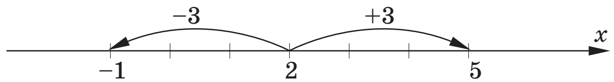


Рис. 4

Таких точок дві, їхні координати: −1 і 5.

Відповідь. −1 і 5.

б) $|x+2|=5$.

Розв'язання

Запишемо дане рівняння у вигляді $|x-(-2)|=5$. Знайдемо на координатній прямій точки, що знаходяться на відстані 5 від точки з координатою (−2) (*рис. 5*). Це точки з координатами −7 і 3.

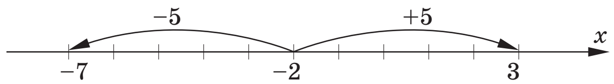


Рис. 5

Розв'яжемо це рівняння аналітичним способом. За означенням модуля: $x+2=5$ або $-(x+2)=5$. Звідки $x=3$ або $x=-7$.

Відповідь. −7; 3.

Розв'яжемо рівняння $|ax-b|=c$.

Рівняння $|ax-b|=c$ можна звести до вигляду $|x-a_1|=b_1$. Дійсно, перетворимо рівняння $|ax-b|=c$ таким чином:

$$\left|a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right|=c\ (a\neq 0).$$

Оскільки модуль добутку дорівнює добутку модулів, то

$$\left|a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right|=|a|\cdot\left|x-\frac{b}{a}\right|=c.$$

Якщо $a\neq 0$, то і $|a|\neq 0$, маємо рівняння: $\left|x-\frac{b}{a}\right|=\frac{c}{|a|}$. Позначивши $\frac{b}{a}=a_1$, $\frac{c}{|a|}=b_1$, дістанемо рівняння $|x-a_1|=b_1$, яке вже вміємо розв'язувати.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|2x-5|=3$.

Розв'язання

I спосіб. Розділимо обидві частини рівняння на 2: $|x-2{,}5|=1{,}5$. Знайдемо на координатній прямій точки, що знаходяться на відстані 1,5 від точки з координатою 2,5 (*рис. 6*).

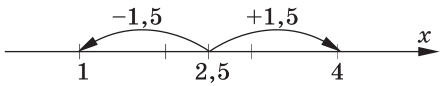


Рис. 6

II спосіб. Розв'яжемо це рівняння, використовуючи означення модуля: $|2x-5|=2x-5$ або $|2x-5|=-(2x-5)$. Тому $2x-5=3$ або $-(2x-5)=3$, звідки $x=4$ або $x=1$.

Відповідь. 1; 4.

б) $|-2x-3|=5$.

Розв'язання

Перетворимо дане рівняння таким чином:

$$|-2(x+1{,}5)|=5;\ |-2|\cdot|x+1{,}5|=5;\ 2|x+1{,}5|=5;\ |x+1{,}5|=2{,}5;\ |x-(-1{,}5)|=2{,}5.$$

Знайдемо на координатній прямій точки, що знаходяться на відстані 2,5 від точки з координатою (–1,5) (*рис. 7*).

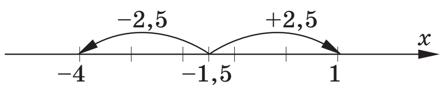


Рис. 7

Розв'яжемо рівняння аналітичним способом. За означенням модуля:

$$|-2x-3|=-2x-3 \text{ або } |-2x-3|=-(-2x-3)=2x+3.$$

$$-2x-3=5 \text{ або } 2x+3=5,$$

звідки $x=-4$ або $x=1$.

Відповідь. –4; 1.

Розв'язування рівнянь виду $|ax+b|=cx+d$, де a, b, c, d – деякі числа і $a\neq 0$, $c\neq 0$

Під час розв'язування рівнянь $|ax+b|=cx+d$ скористаємося означенням модуля, маємо: $ax+b=cx+d$ або $-(ax+b)=cx+d$. Розв'язавши здобуті лінійні рівняння, дістанемо їх корені. Чи можна вважати, що ми завершили розв'язування вихідного рівняння?

Для пошуку відповіді на це запитання проаналізуємо вихідне рівняння. Його ліва частина $|ax+b|$ (згідно з означенням модуля) набуває тільки невід'ємних значень, а права – будь–яких. Отже, корінь вихідного рівняння повинен задовольняти таку умову: x_0 може бути коренем вихідного рівняння, якщо значення виразу cx_0+d – невід'ємне. Тобто, розв'язавши рівняння $ax+b=cx+d$ і $-(ax+b)=cx+d$, необхідно перевірити здобуті корені, чи задовольняють вони вищезазначену умову.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|2x-5|=0{,}5x+2{,}5$.

Розв'язання

За означенням модуля: $2x-5=0{,}5x+2{,}5$ або $-(2x-5)=0{,}5x+2{,}5$. Тоді $1{,}5x=7{,}5$ або $2{,}5x=2{,}5$; $x=5$ або $x=1$.

За допомогою перевірки переконуємося, що обидва корені задовольняють рівняння.

Відповідь. 1; 5.

б) $|5-2x|=-2x+7$.

Розв'язання

За означенням модуля, маємо:

$$5-2x=-2x+7 \text{ або } -(5-2x)=-2x+7.$$

Тоді $0\cdot x=2$ або $4x=12$. Рівняння $0\cdot x=2$ коренів не має. Коренем рівняння $4x=12$ є число 3. За допомогою перевірки переконуємося, що це число є коренем рівняння $|5-2x|=-2x+7$.

Відповідь. 3.

в) $|5-2x|=-2x+3$.

Розв'язання

За означенням модуля, маємо: $5-2x=-2x+3$ або $-(5-2x)=-2x+3$. Тоді $0\cdot x=-2$ або $4x=8$. Рівняння $0\cdot x=-2$ коренів не має. Коренем рівняння $4x=8$ є число 2. За допомогою перевірки переконуємося, що це число не задовольняє рівняння

$$|5-2x|=-2x+3\ (|5-2\cdot 2|=1;\ -2\cdot 2+3=-1;\ 1\neq -1).$$

Відповідь. Коренів немає.

Завдання для самостійного розв'язування

1.1. Розв'яжіть рівняння:

а) $5(x-1)-3(x+2)=7-2(2-x)$; б) $0{,}72-1{,}2(5-0{,}3x)=0{,}09$;

в) $\frac{8-x}{6}-\frac{4x-5}{3}=\frac{x+6}{2}$; г) $\frac{x-1}{3}+\frac{5x+2}{12}=\frac{5+3x}{4}$;

д) $\frac{3x}{1{,}7}=\frac{2{,}1}{0{,}68}$; е) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$;

ж) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$.

1.2. Складіть за умовою рівняння і розв'яжіть його:

а) якщо суму чисел x і 2 зменшити на 26%, то здобуте число дорівнюватиме 7,4;

б) якщо різницю чисел 7 і x збільшити на 20%, то здобуте число дорівнюватиме 9,6;

в) сума чисел 2,4 і $3x$ у 5 разів більша від різниці чисел 3,6 і $0{,}5x$.

1.3. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x|=7{,}5$; б) $2|x|=0$;

в) $|3x|=27$; г) $3|x|=17{,}1$;

д) $|3{,}5x|=7$; е) $|4x|=-4$.

1.4. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості пропорції:

а) $\frac{|x|}{1{,}5}=\frac{1{,}6}{0{,}3}$; б) $\frac{|5x|}{1{,}8}=\frac{0{,}07}{0{,}09}$;

в) $\frac{3{,}8}{7{,}6}=\frac{1{,}08}{5|x|}$; г) $\frac{10{,}4}{3{,}8}=\frac{|0{,}5x|}{1{,}85}$.

1.5. Розв'яжіть рівняння:

а) $5(|x|-3)-2(|x|-7)+7(2|x|+6)=7$;

б) $8|x|-9-(4\cdot|x|-5)=12|x|-(4+5|x|)$;

в) $10(3|x|-2)-3(5|x|+2)+5(11-4|x|)=2{,}5$;

г) $\frac{11}{7}=\frac{2-|x|}{5}$; д) $\frac{3|x|}{5}=\frac{6+|x|}{3}$;

е) $\frac{|x|}{3}+\frac{|x|}{5}=8$; ж) $\frac{|x|}{3}+\frac{|x|}{4}=14$;

з) $0{,}18|x|-7{,}4=0{,}05|x|-5{,}71$; и) $0{,}36|x|-0{,}6=0{,}4|x|-1{,}2$.

1.6. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x-1|=7$; б) $|2-x|=3{,}5$;

в) $|x+1|=3$; г) $|x+2|=-3$;

д) $|x-3{,}5|=4$; е) $|x+2{,}5|=7$;

ж) $|3{,}4-x|=2{,}8$; з) $|-x-2{,}8|=3{,}9$.

1.7. Складіть за умовою рівняння і розв'яжіть його:

а) знайдіть на координатній прямій точки, які віддалені від точки з координатою 7 на відстань 10;

б) знайдіть на координатній прямій точки, відстань від яких до точки з координатою (−5) втричі більша ніж відстань до точки з координатою 2;

в) знайдіть на координатній прямій точки, якщо сума відстаней від них до точки з координатою 0 дорівнює 7.

1.8. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x-8|=3$; б) $|6-3x|=5$;

в) $|3x+5|=7$; г) $|5x-6|=0$;

д) $|8-3x|=0$; е) $|4x+8|=3$;

ж) $|2{,}1x-4{,}2|=8{,}4$; з) $|3{,}4x+6{,}8|=17$;

и) $2|1{,}6-3{,}2x|=5{,}6$; к) $3|2{,}4x+3{,}6|=7$;

л) $\left|\frac{x}{4}-1\right|=5$; м) $\left|-\frac{x}{3}-2\right|=\frac{2}{3}$.

1.9. Складіть за умовою рівняння і розв'яжіть його:

а) знайдіть на координатній прямій точки, відстань від яких до точки з координатою 3,5 дорівнює 4,5;

б) знайдіть на координатній прямій точки, відстань від яких до точки з координатою (−4,5) дорівнює 3,5.

1.10. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}\right|=2$; б) $\left|\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}\right|=3$;

в) $\left|2-\frac{3}{2}x\right|=4{,}8$; г) $\left|-\frac{7}{3}x-1\right|=5{,}3$.

1.11. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x-3|=x+7$; б) $|3-2x|=5-2x$;

в) $|2x-3|=2x-1$; г) $|x-1|=2x-3$;

д) $|2x-3|=x+5$; е) $|7+2x|=7+2x$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Розв'яжіть рівняння:	
а) $\lvert x\rvert=5$; б) $\lvert x-3\rvert=1{,}7$; в) $\lvert 2x+4\rvert=8{,}6$; г) $2(\lvert x\rvert-3)=\lvert x\rvert-10$; д) $\frac{\lvert 2x\rvert-1}{3{,}5}=\frac{7{,}2}{3{,}6}$; е) $\lvert 1-4x\rvert=x+2$	а) $\lvert x\rvert=3$; б) $\lvert x-2\rvert=2{,}8$; в) $\lvert 3x+6\rvert=4{,}2$; г) $3(\lvert x\rvert+2)=2\lvert x\rvert+4$; д) $\frac{\lvert 3x\rvert-1}{8{,}8}=\frac{3{,}6}{7{,}2}$; е) $\lvert 3+5x\rvert=x+2$

2. Рівняння, які містять суму модулів

Розглянемо рівняння виду $|x-a|+|x-b|=c$ за умови, що $c\ge 0$ і $a\ne b$ (при $c<0$ рівняння коренів не має, при $a=b$ воно зводиться до рівняння $2|x-a|=c$ або $|x-a|=0{,}5c$, способи розв'язування якого розглянуто в попередньому пункті).

Який геометричний зміст має це рівняння?

На координатній прямій потрібно знайти такі точки, щоб сума відстані від них до точок з координатами a і b дорівнювала c.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x-2|+|x-5|=1$.

Розв'язання

Позначимо на координатній прямій точки $A(2)$ і $B(5)$. Відстань між ними $AB=|2-5|=3$ (*рис. 8*).

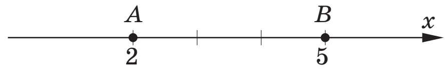


Рис. 8

Розглянемо три випадки.

1) Точка C – довільна точка відрізка AB (*рис. 9*).

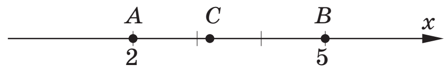


Рис. 9

Сума відстані від C до A і від C до B дорівнює відстані від A до B: $CA+CB=AB$, тобто $CA+CB=3$.

2) Точка D – довільна точка координатної прямої, яка лежить ліворуч від точки A (*рис. 10*).

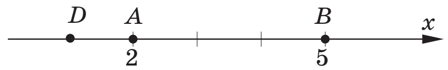


Рис. 10

Сума відстані від D до A і від D до B: $DA+DB=2DA+AB>AB$, тобто $DA+DB>3$.

3) Точка E – довільна точка координатної прямої, яка лежить праворуч від точки B (*рис. 11*).

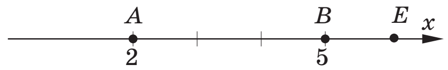


Рис. 11

Сума відстаней від E до A і від E до B: $EA+EB=2EB+AB>AB$, тобто $EA+EB>3$.

Таким чином, де б не була розташована точка на координатній прямій, сума відстаней від неї до точок з координатами 2 і 5 більше або дорівнює 3, тобто вона не може дорівнювати 1, що вимагається в умові рівняння.

Відповідь. Коренів немає.

б) $|x-2|+|x-5|=7$.

Розв'язання

Зазначимо, що це рівняння відрізняється від попереднього тільки числом, яке стоїть в його правій частині.

1) Ми вже знаємо, що точки, які є коренями цього рівняння, не можуть належати відрізку AB, де $A(2)$, $B(5)$, оскільки сума відстаней від будь-якої точки цього відрізка до точок A і B дорівнює 3, $3 \neq 7$ (див. випадок 1) попереднього рівняння.
2) Точка D — довільна точка координатної прямої, яка лежить ліворуч від точки A (рис. 10). Тобто, $DA+DB=2DA+AB$. Враховуючи, що $DA+DB=7$ (за умовою), а $AB=3$, маємо: $7=2DA+3$, $DA=2$. Це означає, що точка D знаходиться на координатній прямій на 2 одиниці ліворуч від точки A і координата точки D дорівнює 0.
3) Точка E — довільна точка координатної прямої, яка лежить праворуч від точки B (рис. 11). Тобто, $EA+EB=2EB+AB$. Враховуючи, що $EA+EB=7$ (за умовою), а $AB=3$, маємо: $7=2EB+3$, $EB=2$.
Це означає, що точка E знаходиться на координатній прямій на 2 одиниці праворуч від точки B і координата точки E дорівнює 7.
Відповідь. 0; 7.

в) $|x-2|+|x-5|=3$.

Розв'язання

Позначимо на координатній прямій точки $A(2)$ і $B(5)$. Сума відстаней від будь-якої точки C відрізка AB до точок A і B дорівнює $CA+CB=3$ (рис. 9). Оскільки в правій частині рівняння стоїть число 3, то це означає, що коренями рівняння є всі точки відрізка AB.

Відповідь. $[2;5]$.

Узагальнюючи результати, здобуті під час розв'язування рівняння $|x-a|+|x-b|=c$ ($c \geq 0$, $c \neq b$), можна зробити висновок:

- якщо $c<|b-a|$, то рівняння коренів не має;
- якщо $c=|b-a|$, то коренями рівняння є всі точки відрізка $[a;b]$, тобто рівняння має нескінченну множину коренів;
- якщо $c>|b-a|$, то рівняння має два корені:

$$x=a-\frac{c-|b-a|}{2} \text{ або } x=b+\frac{c-|b-a|}{2}.$$

Розглянемо ще декілька прикладів.

Розв'язати рівняння:

а) $|x+2|+|x-6|=10$.

Розв'язання

Позначимо на координатній прямій точки $A(-2)$ і $B(6)$. Корені рівняння — це числа, що відповідають точкам координатної прямої, сума відстаней від яких до точок A і B, дорівнює 10.

$$AB=|6-(-2)|=8<10,$$

отже точки, які ми шукаємо знаходяться на координатній прямій ліворуч від точки A або праворуч від точки B (*рис. 12*).

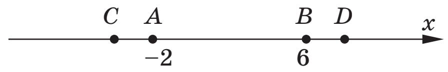


Рис. 12

Нехай C — довільна точка координатної прямої, яка розташована ліворуч від точки A. Тоді $CA+CB=2CA+AB$. Враховуючи, що $CA+CB=10$ (за умовою), а $AB=8$, дістаємо: $10=2CA+8$, $CA=1$. Тобто точка C має координату (−3).

Нехай D — довільна точка координатної прямої, яка розташована праворуч точки B. Тоді $DA+DB=2DB+AB$. Враховуючи, що $DA+DB=10$ (за умовою), а $AB=8$, дістаємо: $10=2DB+8$, $DB=1$. Тобто точка C має координату 7.

Відповідь. −3; 7.

б) $|x+3{,}8|+|4-x|=6{,}5$.

Розв'язання

Оскільки $|4-x|=|x-4|$, то розв'язуватимемо рівняння

$$|x+3{,}8|+|x-4|=6{,}5.$$

Позначимо на координатній прямій точки $A(-3{,}8)$ і $B(4)$ (*рис. 13*).

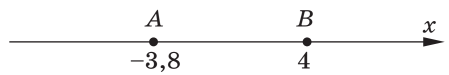


Рис. 13

Корені рівняння — це числа, що відповідають точкам координатної прямої, сума відстаней від яких до точок A і B дорівнює 6,5. $AB=|4-(-3{,}8)|=7{,}8$. Оскільки $6{,}5<7{,}8$, то на координатній прямій немає точок, сума відстаней від яких до точок $A(-3{,}8)$ і $B(4)$ дорівнювала б 6,5.

Відповідь. Коренів немає.

в) $|x+3{,}5|+|x+0{,}5|=3$.

Розв'язання

Позначимо на координатній прямій точки $A(-3{,}5)$ і $B(-0{,}5)$ (*рис. 14*).

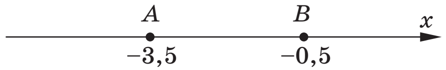


Рис. 14

Корені рівняння — це координати точок координатної прямої, сума відстаней від яких до точок A і B дорівнює 3.

$$AB=\left|-3{,}5-(-0{,}5)\right|=3.$$

Оскільки в правій частині рівняння стоїть число 3, то це означає, що сума відстаней від будь-якої точки координатної прямої, яка належить відрізку AB, до точок $A(-3{,}5)$ і $B(-0{,}5)$ дорівнює 3.

Відповідь. $[-3{,}5; -0{,}5]$.

Завдання для самостійного розв'язування

1.12. Які з чисел: −2; 0; 1; 2,5; 3,75; 4; 5; 5,5; 6; 7,5 є коренями рівняння:

а) $|x-1|+|x-4|=3$; б) $|x-1|+|4-x|=5$;

в) $|1-x|+|x-4|=7$?

1.13. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x-1|+|x-4|=2$; б) $|x-1|+|4-x|=3$;

в) $|1-x|+|x-4|=5$; г) $|1-x|+|4-x|=10$.

1.14. Які з чисел; −5; −4; −4,5; −3; −3,5; −2; −2,5; 0; 1,75; 2,8; 3; 3,5; 4; 4,5 є коренями рівняння:

а) $|x+3|+|x-3|=6$; б) $|x+3|+|3-x|=8$?

1.15. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x+3|+|5-x|=6$; б) $|-x-3|+|x-5|=8$;

в) $|-x-3|+|5-x|=10$; г) $|x+3|+|x-5|=13$.

1.16. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x-3|+|7-x|=8$; б) $|x+3|+|x-7|=10$;

в) $|3-x|+|x+7|=10$; г) $|x+3|+|7-x|=14$;

д) $|x-3|+|x+7|=16$; е) $|x+2{,}5|+|2{,}5-x|=4$;

ж) $|x+4|+|x-6|=8{,}6$; з) $|2{,}4-x|+|x-8{,}2|=5{,}8$;

и) $|x-2{,}4|+|8{,}2-x|=10{,}2$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
1. Які з чисел: −7; −4,5; −3; −2,5; 0; 3,5; 5; 7,5; 8; 10 є коренями рівняння:	
а) $|x+3|+|3-x|=6$; б) $|2-x|+|x-5|=7$?	а) $|x+3|+|3-x|=20$; б) $|x+2|+|-x-5|=7$?
2. Розв'яжіть рівняння:	
а) $|x+6|+|-x-2|=4$; б) $|-x-6|+|x+2|=3$; в) $|x+6|+|x+2|=7$	а) $|2-x|+|x-6|=4$; б) $|x-2|+|6-x|=3$; в) $|2-x|+|6-x|=7$

3. Рівняння, які містять різницю модулів

Розглянемо рівняння виду $|x-a|-|x-b|=c$, де $a\neq b$.

З геометричної точки зору розв'язати це рівняння означає знайти на координатній прямій такі точки, для яких різниця відстаней до точки з координатою a і до точки з координатою b дорівнює числу c.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x-2|-|x-5|=3$.

Розв'язання

Позначимо на координатній прямій точки $A(2)$ і $B(5)$. Відстань між ними дорівнює $AB=|5-2|=3$ (*рис. 15*).

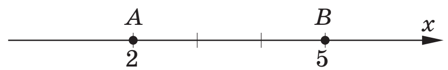


Рис. 15

Розглянемо три випадки.

1) Точка $C(x)$ — довільна точка координатної прямої, яка лежить ліворуч від точки A (*рис. 16*).

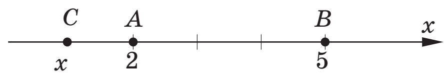


Рис. 16

Відстані від точки $C(x)$ до точок $A(2)$ і $B(5)$ відповідно дорівнюють: $CA=|x-2|$, $CB=|x-5|$. За умовою $|x-2|-|x-5|=3$, тобто $CA-CB=3$ (що відповідає геометричному змісту рівняння). Але

$CB = CA + AB$, тому $CA - CB = CA - (CA + AB) = -AB$ — від'ємне число і воно не може дорівнювати 3. Це означає, що ліворуч від точки A немає точок, координати яких є коренями рівняння.

2) Точка D — довільна точка координатної прямої, яка лежить між точками A і B (*рис. 17*).

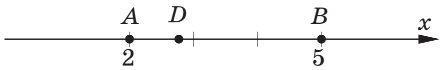


Рис. 17

Згідно з геометричним змістом рівняння, різниця відстаней від точки D до точки $A(2)$ і до точки $B(5)$ має дорівнювати 3, тобто $DA - DB = 3$. Але $DA - DB < DA + DB$. Враховуючи, що

$$DA + DB = AB = 3,$$

маємо: $DA - DB < 3$. Це означає, що й усередині відрізка AB немає точок, координати яких є коренями рівняння.

3) Точка E — довільна точка координатної прямої, яка лежить праворуч від точки B (*рис. 18*).

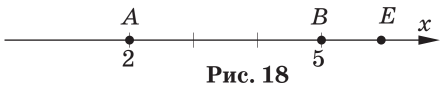


Рис. 18

Різниця відстаней від точки E до точки $A(2)$ і до точки $B(5)$: $EA - EB = (AB + BE) - EB = AB = 3$. Таким чином, для будь-якої точки $E(x)$, яка лежить на координатній прямій праворуч від точки B, виконується рівність $|x-2| - |x-5| = 3$. Це означає, що всі точки, які лежать на координатній прямій праворуч від точки $B(5)$, мають координати, які є коренями рівняння $|x-2| - |x-5| = 3$.

З'ясуємо, чи задовольняють рівняння координати точок A і B.

$x = 2$: $|2-2| - |2-5| \neq 3$;

$x = 5$: $|5-2| - |5-5| = 3$.

Тобто число 5 є коренем рівняння.

Таким чином, корені рівняння — усі числа проміжку $[5; +\infty)$.

Відповідь. $[5; +\infty)$.

б) $|x-2| - |5-x| = 2$.

Розв'язання

Оскільки $|5-x| = |x-5|$, то розв'язуватимемо рівняння

$$|x-2| - |x-5| = 2.$$

Зазначимо, що дане рівняння відрізняється від попереднього тільки числом, яке стоїть у правій частині. Тому можна скористатися висновками, зробленими під час розв'язування попереднього рівняння.

1) Для координат усіх точок координатної прямої, які лежать ліворуч від точки $A(2)$, виконується рівність $|x-2| - |x-5| = -3$.
2) Для координат усіх точок координатної прямої, які лежать праворуч від точки $B(5)$, виконується рівність $|x-2| - |x-5| = 3$.

Таким чином, коренями рівняння $|x-2| - |x-5| = 2$ можуть бути тільки координати точок відрізка AB (рис. 17).

Довжина відрізка $AB = 3$. Нехай $DA = y$, тоді $DB = 3 - y$. Згідно з геометричним змістом рівняння, маємо:

$$DA - DB = 2 \text{ або } y - (3 - y) = 2,$$

звідки $y = 2{,}5$. Тоді координата точки D: $2 + 2{,}5 = 4{,}5$.

Отже, число 4,5 — корінь даного рівняння.

Відповідь. 4,5.

Узагальнюючи результати, здобуті під час розв'язування рівняння $|x-a| - |x-b| = c$ $(a \neq b)$, можна зробити висновок:

- якщо $c < -m$ або $c > m$, де m — відстань між точками $A(a)$ і $B(b)$, то дане рівняння коренів не має;
- якщо $c = -m$ або $c = m$, то рівняння має нескінченну множину коренів: $(-\infty; a]$ або $[b; +\infty)$ відповідно;
- якщо $-m < c < m$, то рівняння має єдиний корінь: $x = a + \dfrac{m+c}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $|x-2{,}1| - |x-4{,}5| = -2{,}4$.

Розв'язання

Відстань між точками $A(2{,}1)$ і $B(4{,}5)$ дорівнює $AB = |2{,}1 - 4{,}5| = 2{,}4$. Згідно з нашими позначеннями, у даному випадку: $m = 2{,}4$; $c = -24$. Тобто $c = -m$ і, як було показано вище, рівняння має нескінченну множину коренів: $(-\infty; 2{,}1]$.

Відповідь. $(-\infty; 2{,}1]$.

Завдання для самостійного розв'язування

1.17. Які з чисел: −2; −1,5; 0; 0,5; 1; 2; 3,5; 4; 5,5; 7 є коренями рівняння:

а) $|x+1| - |x-2| = -3$; б) $|x+1| - |2-x| = 3$;

в) $|-x-1| - |x-2| = 0$?

1.18. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x+1|-|x-2|=-3$; б) $|x+1|-|2-x|=3$;

в) $|-x-1|-|x-2|=-2$; г) $|x+1|-|x-2|=1$;

д) $|-x-1|-|2-x|=2{,}5$; е) $|x+1|-|x-2|=-1{,}5$.

1.19. Які з чисел: −7; −5,5; −4,25; 0; 1,25; 2; 4; 4,5; 5; 7 є коренями рівняння:

а) $|x-5|-|x-1|=-4$; б) $|x-5|-|1-x|=4$;

в) $|5-x|-|x-1|=2$; г) $|5-x|-|1-x|=-2$?

1.20. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x+1{,}4|-|x+0{,}2|=-1{,}2$; б) $|x+1{,}4|-|x+0{,}2|=-1$;

в) $|x+1{,}4|-|x+0{,}2|=0$; г) $|x+1{,}4|-|x+0{,}2|=1{,}2$.

1.21. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2{,}3-x|-|x+1{,}4|=2$; б) $|x-2{,}3|-|x+1{,}4|=-3{,}7$;

в) $|x-2{,}3|-|-x-1{,}4|=3{,}7$; г) $|2{,}3-x|-|-x-1{,}4|=0$.

1.22. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left|x-\frac{2}{3}\right|-\left|x+\frac{1}{3}\right|=-1$; б) $\left|\frac{2}{3}-x\right|-\left|x+\frac{1}{3}\right|=1$;

в) $\left|x-\frac{2}{3}\right|-\left|-x-\frac{1}{3}\right|=0$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
1. Які з чисел: −2; −1; 0; 1; 2; 3 є коренями рівняння:	
а) $\lvert x+1\rvert-\lvert 1-x\rvert=-2$; б) $\lvert 2-x\rvert-\lvert x+3\rvert=1$?	а) $\lvert x+1\rvert-\lvert 1-x\rvert=2$; б) $\lvert 2-x\rvert+\lvert x-3\rvert=-1$?
2. Розв'яжіть рівняння:	
а) $\lvert 3-x\rvert-\lvert x+5\rvert=-8$; б) $\lvert x-3\rvert-\lvert x+5\rvert=8$; в) $\lvert 3-x\rvert-\lvert x+5\rvert=-2$; г) $\lvert x-3\rvert-\lvert x+5\rvert=2$	а) $\lvert x+3\rvert-\lvert 5-x\rvert=-8$; б) $\lvert x+3\rvert-\lvert x-5\rvert=8$; в) $\lvert x+3\rvert-\lvert x-5\rvert=-2$; г) $\lvert x+3\rvert-\lvert 5-x\rvert=2$

Контрольна робота з теми «Рівняння з модулем»

Варіант 1

1. Складіть за умовою рівняння та розв'яжіть його.
На координатній прямій найдіть точки, які віддалені від точки з координатою 2,7 на відстань 5,4.

2. Які з чисел: $-4\frac{1}{3}$; −3; −2; 1; 2; 5 є коренями рівняння:

а) $|2x-3|=7$; б) $|3x+5|=8$?

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{|2x|-5}{7{,}2}=\frac{1{,}4}{0{,}7}$; б) $\left|2-\frac{x}{3}\right|=\frac{2}{3}$;

в) $|x+2|+|x-6|=10$; г) $|x+2|-|x-6|=4$;

д) $|2{,}5-x|+|x+2{,}5|=5$.

Варіант 2

1. Складіть за умовою рівняння та розв'яжіть його.
На координатній прямій знайдіть точки, які віддалені від точки з координатою 3,6 на відстань 7,2.

2. Які з чисел: −5; −4; −3,5; −1 є коренями рівняння:

а) $|2x+3|=5$; б) $|4x+3|=17$?

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3|x|+4}{3{,}6}=\frac{1{,}8}{0{,}9}$; б) $\left|3-\frac{x}{4}\right|=\frac{1}{4}$;

в) $|x+3|+|x-5|=9$; г) $|x+3|-|x-5|=4$;

д) $|3{,}5+x|+|3{,}5-x|=7$.

§ 2. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

Найпростіші лінійні рівняння з параметрами

Зазначимо, що будь-яке лінійне рівняння можна записати у вигляді $ax=b$, де a і b — деякі числа, x — змінна. З'ясуємо скільки коренів має лінійне рівняння $ax=b$ залежно від значень коефіцієнтів a і b. Для цього розглянемо приклади розв'язування лінійних рівнянь.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $2(x-3)-3(5-x)=x+4$.

Розв'язання

Використовуючи основні властивості рівнянь, зведемо вихідне рівняння до найпростішого вигляду $ax=b$:

$$2x-6-15+3x=x+4,\ 2x+3x-x=6+15+4,\ (2+3-1)x=25,\ 4x=25.$$

Звідки $a=4$, $b=25$. Рівняння має єдиний корінь:

$$x=\frac{b}{a}=\frac{25}{4}=6{,}25.$$

Відповідь. 6,25.

б) $2(x-3)-3(4-x)=4+5x$.

Розв'язання

Використовуючи основні властивості рівнянь, запишемо рівняння у вигляді $ax=b$:

$$2x-6-15+3x=4+5x,\ 2x+3x-5x=6+15+4,\ (2+3-5)x=25,\ 0x=25.$$

Звідки $a=0$, $b=25$. Рівняння коренів не має, оскільки при будь-якому значенні змінної x, ліва частина рівняння дорівнює нулю, а права частина — числу, яке нулю не дорівнює.

Відповідь. Коренів немає.

в) $2(x-3)-3(5-x)=5x-21$.

Розв'язання

Використовуючи основні властивості рівнянь, зведемо рівняння до найпростішого вигляду $ax=b$:

$$2x-6-15+3x=5x-21,\ 2x+3x-5x=6+15-21,\ (2+3-5)x=0,\ 0x=0.$$

Звідки $a=0$, $b=0$. Коренями рівняння є всі числа (безліч коренів), оскільки при будь-якому значення змінної x, рівність $0x=0$ правильна.

Відповідь. Усі числа.

Узагальнюючи результати, здобуті під час розв'язування цих рівнянь, можна зробити висновок:

- якщо $a\neq 0$, то при будь-якому значенні b рівняння $ax=b$ має єдиний корінь $x=\frac{b}{a}$;
- якщо $a=0$, $b\neq 0$, то рівняння $ax=b$ коренів не має;
- якщо $a=0$, $b=0$, то рівняння $ax=b$ має безліч коренів.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою блок-схеми (*рис. 19*).

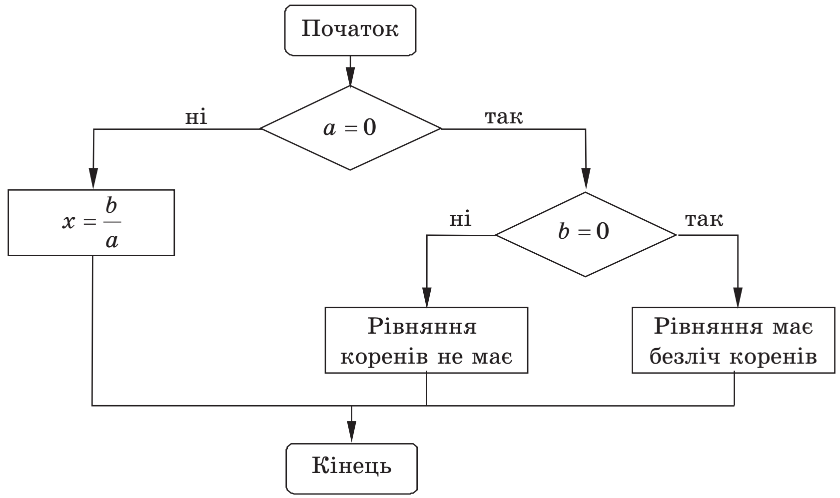


Рис. 19

Параметр — це змінна або постійна величина в рівнянні, яка не розглядається як така, що треба знайти, а навпаки, корені рівняння знаходять залежно від цієї величини.

Розв'язати рівняння з параметрами означає з'ясувати, при яких значеннях параметрів рівняння має корені і знайти їх (як правило, залежно від параметрів, тобто розв'язування рівняння повинно супроводжуватись дослідженням).

Наприклад у рівнянні $ax-5=7$, x — змінна величина, яку треба знайти залежно від параметра a. Перетворивши це рівняння, дістанемо: $ax=12$. Отже, при $a\neq 0$ $x=\frac{12}{a}$; при $a=0$ рівняння коренів не має.

Розглянемо деякі приклади дослідження лінійних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax-3=b$ залежно від параметрів a і b.

Розв'язання

Виконавши у рівнянні $ax-3=b$ тотожні перетворення, дістанемо: $ax=b+3$.

- Якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{b+3}{a}$ при будь-якому b;
- якщо $a=0$, то при $b=-3$ рівняння набуває вигляду $0x=0$, тобто коренями рівняння є всі числа;
- якщо $a=0$ і $b\neq -3$, дістанемо $0x=b+3$, причому $b+3\neq 0$, така рівність неможлива, тому рівняння коренів не має.

Відповідь. При $a \neq 0$ і будь-якому b $x = \frac{b+3}{2}$; при $a = 0$ і $b = -3$ корені рівняння — всі числа; при $a = 0$ і $b \neq -3$ коренів немає.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

а) $(a-1)(a+1)x - a - 1 = 0$ залежно від a.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді:

$$(a-1)(a+1)x = a+1.$$

Добуток $(a-1)(a+1)$ дорівнює нулю при $a = 1$ або $a = -1$, тому розглянемо такі випадки:

1) при $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$, яке коренів не має;
2) при $a = -1$ дістанемо рівняння $0x = 0$, корені якого є всі числа;
3) при $|a| \neq 1$ $(a-1)(a+1) \neq 0$, тому $x = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)}$, $x = \frac{1}{a-1}$.

Відповідь. При $|a| \neq 1$ $x = \frac{1}{a-1}$; при $a = -1$ корені рівняння — всі числа; при $a = 1$ коренів немає.

б) $(a+4)x - 2{,}5x = (a-2)(a+3) + 3{,}5x$.

Розв'язання

Перетворимо дане рівняння, скориставшись основними властивостями рівнянь:

$$(a+4)x - 2{,}5x - 3{,}5x = (a-2)(a+3),\ (a+4-2{,}5-3{,}5)x = (a-2)(a+3),$$
$$(a-2)x = (a-2)(a+3).$$

Якщо $a \neq 2$, то рівняння має єдиний корінь

$$x = \frac{(a-2)(a+3)}{a-2},\ x = a+3.$$

Якщо $a = 2$, то рівняння набуває вигляду $0x = 0$, його коренями є всі числа.

Відповідь. При $a \neq 2$ $x = a+3$; при $a = 2$ корені — всі числа.

в) $7{,}5x - 2ax - a^2 = 5{,}5x - 3ax - 4$.

Розв'язання

Скориставшись властивостями рівнянь, виконаємо в ньому перетворення:

$$7{,}5x - 2ax - 5{,}5x + 3ax = a^2 - 4,\ (a+2)x = a^2 - 4,\ (a+2)x = (a-2)(a+2).$$

Якщо $a = -2$, то рівняння набуває вигляду $0x = 0$ і його коренями є всі числа.

Якщо $a \neq -2$, то рівняння має єдиний корінь

$$x = \frac{(a-2)(a+2)}{a+2},\ x = a-2.$$

Відповідь. При $a = -2$ корені — всі числа; при $a \neq -2$ $x = a-2$.

г) $|ax-1| = |x+3|$.

Розв'язання

Рівність $|ax-1| = |x-3|$ виконується, якщо:

1) $ax - 1 = x + 3$;
2) $ax - 1 = -(x+3)$.

Розглянемо кожний випадок окремо.

1) $ax - 1 = x + 3$,

$$ax - x = 4,\ (a-1)x = 4.$$

Якщо $a = 1$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 4$. Рівняння коренів не має.

Якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{4}{a-1}$.

2) $ax - 1 = -(x+3)$,

$$ax - 1 = -x - 3,\ ax + x = -2,\ (a+1)x = -2.$$

Якщо $a = -1$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = -2$. Рівняння коренів не має.

Якщо $a \neq -1$, то $x = -\frac{2}{a+1}$.

Відповідь. При $|a| \neq 1$ $x_1 = \frac{4}{a-1}$, $x_2 = -\frac{2}{a+1}$; при $a = -1$ $x = \frac{4}{a-1}$; при $a = 1$ $x = -\frac{2}{a+1}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1.23. Розв'яжіть рівняння залежно від параметрів a і b:

а) $4 + bx = a$;
б) $b = a(x-3)$;
в) $4 = a - (bx-1)$;
г) $\frac{2x-a}{b} = 3$;
д) $\frac{1-bx}{a} = 1$;
е) $ax - 26 = a - 7\left(3 + \frac{5}{7}x\right)$.

1.24. Підберіть значення параметра a так, щоб рівняння мало корені:

а) $5x-7=5x-a$; б) $x-(2-x)=2x-a$;

в) $\frac{a}{2}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-(x-8)$; г) $\frac{x}{3}+\frac{a}{5}=(x+15)-\frac{2}{3}x$;

д) $ax-3(1+x)=7$.

1.25. Дослідіть рівняння з параметром a:

а) $2x-3(x-a)=3+a$; б) $a+6(x-1)=2a+x$;

в) $\frac{ax-2}{2}=\frac{3-ax}{4}$; г) $\frac{5-ax}{3}=\frac{7-ax}{6}$;

д) $ax-3(1+x)=5$; е) $7-ax=2(3+x)$;

ж) $a^2x-1=x+a$; з) $\frac{4ax+27}{a^2-9}=\frac{x-1}{a+3}+\frac{4}{a-3}$.

1.26. При яких значеннях параметра a рівняння $|x|=a$:

а) не має коренів; б) має тільки один корінь;

в) має два корені; г) має безліч коренів?

1.27. Розв'яжіть рівняння:

а) $|ax-1|=3$; б) $|2x-1|=|ax-1|$;

в) $|x+2|=ax-1$; г) $|3-ax|=x+2$.

1.28. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $|x+1|+|x-a|=3$ має безліч коренів.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	**Варіант 2**
1. Розв'яжіть рівняння залежно від параметрів a і b:	
$2+ax=b-3\left(x-\frac{2}{3}\right)$	$1{,}5a+2x=-a(x-1{,}5)+b$
2. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра a:	
а) $(a-2)(a+2)x=a-2$; б) $\lvert x+2\rvert=ax-3$	а) $(a+3)(a-3)x=a+3$; б) $\lvert x-2\rvert=5-ax$
3. Підберіть значення параметра a так, щоб рівняння мало корені:	
а) $\frac{a}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+\frac{ax}{6}$; б) $\lvert 2x+5\rvert=a$	а) $\frac{x}{3}+\frac{a}{5}=\frac{ax}{15}$; б) $\lvert 3-2x\rvert=a$

Контрольна робота з теми «Рівняння з параметрами»

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра a:

а) $a(x-1)+3(5-x)=5(3+2x)+3-16x$;

б) $\frac{ax}{2}+\frac{2}{3}=\frac{x}{3}+a$; в) $|x+1|=ax-4$.

2. Підберіть значення параметра a так, щоб рівняння мало корені:

а) $(a-1)(a+1)x=a+1$; б) $|3+4x|=a-2$;

в) $0{,}5-3x=ax-3{,}5(2-4x)$.

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра a:

а) $2a(x-1)+4(3-x)=3(2x-1)+21-16x$;

б) $\frac{x}{3}+\frac{a}{2}=\frac{ax}{2}+\frac{1}{3}$; в) $|x-2|=ax-1$.

2. Підберіть значення параметра a так, щоб рівняння мало корені:

а) $(a-2)(a+2)x=a-2$; б) $|4-2x|=a+1$;

в) $2{,}5-2x=ax+3(1-2x)$.

Розділ II. ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

§ 1. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1. Поняття функції

У навколишньому середовищі ми повсюди спостерігаємо явища, пов'язані між собою. Зв'язки, які супроводжують ці явища полягають у тому, що одна величина певним чином (за певним законом) залежить від іншої.

Приклад 1. Відстань S, яку подолає потяг за t год, що рухається зі швидкістю $v = 80$ км/год залежить від часу t:

$$S = S(t),\ S = 80t.$$

Приклад 2. Площа круга S залежить від радіуса r цього круга:

$$S = S(r),\ S(r) = \pi r^2.$$

Приклад 3. Сила струму, що проходить через провідник при сталій напрузі U_0, залежить від електричного опору провідника R:

$$I = I(R),\ I(R) = \frac{U_0}{R}.$$

У загальному випадку, коли величина y залежить від величини x, кажуть, що задано функцію $y = f(x)$. При цьому y називають залежною величиною або функцією, x — незалежною змінною або аргументом функції.

У прикладі 1 незалежна змінна — це час, а функція часу — це відстань; у прикладі 2 незалежна змінна — радіус круга, а функція — площа круга; у прикладі 3 незалежна змінна — це величина опору, а функція — величина сили струму.

У прикладах 1–3 залежність однієї величини від іншої було задано за допомогою формули. Залежність між величинами можна встановлювати також за допомогою відповідності.

Приклад 4. Розглянемо множину учасників шкільної математичної олімпіади серед учнів шостих класів. Кожному елементу цієї множини поставимо у відповідність натуральне число, яке є порядковим номером прізвища учня в реєстраційному списку.

Абрамов	→	1
Березіна	→	2
Волуйко	→	3
Дацько	→	4
Кулік	→	5
Міхов	→	6
Назарова	→	7
Проценко	→	8
Саприкін	→	9
Щербіна	→	10

Приклад 5. Розглянемо множину учасників шкільної математичної олімпіади серед учнів шостих класів. Кожному елементу цієї множини поставимо у відповідність натуральне число, яке є порядковим номером місця, яке учень посів на олімпіаді.

Абрамов	→	4
Березіна	→	2
Волуйко	→	10
Дацько	→	9
Кулік	→	1
Міхов	→	5
Назарова	→	7
Проценко	→	6
Саприкін	→	8
Щербіна	→	3

Аналізуючи відповідності у прикладах 4–5, ми помічаємо, що одному й тому ж самому учню відповідають різні натуральні числа. Це означає, що ці відповідності задають різні функції.

Сформулюємо означення функції.

> ***Означення.*** Нехай задано дві множини X і Y. Якщо кожному елементу x множини X поставлено у відповідність деякий елемент y множини Y, то така відповідність називається функцією.

При цьому множину X називають областю визначення функції, а множину Y — областю значень функції.

Як правило, область визначення функції $y=f(x)$ позначають $D(f)$, а область значень — $E(f)$.

Означення. Графіком функції f називається множина всіх точок $(x;y)$ координатної площини, де $y=f(x)$, а x «пробігає» всю область визначення функції f.

Завдання для самостійного розв'язування

2.1. Нехай N — множина натуральних чисел, $S(n)$ — сума цифр натурального числа n. Чи є $S(n)$ функцією, яка задана на множині N?

2.2. Чи правильне твердження:

а) площа поверхні куба є функцією від довжини його ребра;

б) об'єм куба є функцією від довжини його ребра?

2.3. Наведіть приклади функцій $f(x)$, які задовольняють умову:

а) $f(x)$ визначена при всіх додатних x;

б) $f(x)$ визначена тільки при натуральних x;

в) $f(x)$ визначена на множині всіх чотирикутників.

2.4. Функцію задано формулою $y=f(x)$. Укажіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{2}{x-2}$;

в) $y=\dfrac{x}{x+2}$; г) $y=2x-3$;

д) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; е) $y=x^4$.

2.5. Функцію задано формулою $y=2x-5$. Обчисліть:

$$y(1);\ y(-1);\ y\left(\frac{1}{2}\right);\ y\left(-\frac{1}{2}\right);\ y(0).$$

2.6. Функцію задано формулою $y=\dfrac{5}{x}$. Обчисліть:

$$y(-1);\ y(1);\ y(-5);\ y(5);\ y(0).$$

2.7. Заповніть таблицю:

x	-5	$-3{,}5$	-2	-1	0	1	2	$3{,}5$	5
x^2									

2.8. Функцію задано формулою $y=3-2x^2$. Чи правильно, що:

а) $y(1)=1$; б) $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$;

в) $y(-2)=-5$; г) $y(3)=15$?

2.9. Функцію задано формулою $f(x)=-2x+3$. З'ясуйте, чи належить графіку цієї функції точка:

а) $A(1;1)$; б) $B(-1;1)$;

в) $C(0;3)$; г) $D(-2;-1)$;

д) $F(-2;7)$; е) $D\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

2.10. Функцію задано формулою $f(x)=x^3+1$. З'ясуйте, чи належить графіку цієї функції точка:

а) $A(0;1)$; б) $B(-1;0)$;

в) $G(2;9)$; г) $D(-2;9)$.

2.11. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює x см, а другої — на 2 см менше. Виразіть через x периметр P і площу S цього прямокутника.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	**Варіант 2**
1. Функцію задано формулою	
$y=2x-1$.	$y=2x+1$.
а) Знайдіть: $y(-4{,}5)$; $y(10)$; $y(13)$;	а) Знайдіть: $y(-5{,}5)$; $y(5)$; $y(10)$;
б) знайдіть значення x, при якому $y=-19$	б) знайдіть значення x, при якому $y=19$
2. Укажіть область визначення функції:	
а) $y=\dfrac{3x}{2-x}$;	а) $y=\dfrac{5x}{x+3}$;
б) $y=3+x^2$	б) $y=3-x^3$
3. Функцію задано формулою	
$y=2x^2-3$	$y=3-2x$
Чи належить графіку функції точка:	
а) $M(1;-1)$;	а) $N(1;1)$;
б) $N(2;1)$?	б) $P(-1;4)$?

2. Способи задання функцій

Із означення функції випливає, що для її задання необхідно вказати дві множини чисел $X(D(f))$ і $Y(E(f))$ і відповідність між ними. Це можна зробити за допомогою чотирьох способів: табличного, аналітичного, графічного та словесного.

Табличний спосіб

За табличного способу задання функції в певному порядку записують значення аргументу: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, а потім відповідні значення функції: $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$.

Так, наприклад, побудовані таблиці квадратів чисел, значень тригонометричних функцій тощо.

Табличний спосіб часто використовують у природознавстві та техніці, де результати експериментів зазвичай записують за допомогою таблиць.

Приклад 1. Результати дослідження залежності величини постійного струму I від величини напруги U за умови, що загальний опір R величина постійна, подані у вигляді *таблиці 1*.

Таблиця 1

U, вольт	3	6	9	12	15	18	21
I, ампер	1	2	3	4	5	6	7

Цією таблицею встановлена функціональна залежність $I = I(U)$.

Перевага табличного способу задання функції полягає в простоті знаходження значень функції за значеннями аргументу.

Але таблиця не дає повного уявлення про зміну функції залежно від аргументу. Крім того, для знаходження значень функції за значеннями аргументу, що не вказані в таблиці, доводиться виконувати додаткові обчислення. Недоліком цього способу є і відсутність достатньої наочності.

Аналітичний спосіб

Цей спосіб полягає в тому, що задається формула, за допомогою якої за заданими значеннями аргументу можна знайти відповідні значення функції.

Приклад 2. Функціональна залежність, встановлена таблицею 1, може бути задана формулою $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома).

Приклад 3. Кількість цукру, необхідного для виготовлення джему, залежить від кількості ягід: чим більше ми підготуємо ягід, тим більше нам знадобиться цукру.

Цю залежність задає формула $y = kx$, де k — коефіцієнт пропорційності, y (у даному випадку) — маса цукру, x — маса ягід.

Зокрема, якщо $k = 1{,}5$, то можна легко підрахувати кількість цукру, яка знадобиться для виготовлення джему із ягід у кількості 3 кг, 4 кг, 5 кг і т. д.

Залежність $y = kx$ називається прямою пропорційністю.

Часто зустрічається така залежність y від x, що при збільшенні (зменшенні) аргументу в декілька разів, значення функції зменшується (збільшується) у стільки ж разів.

Така залежність називається оберненою пропорційністю і виражається формулою $y = \frac{k}{x}$.

Приклад 4. Під час рівномірного руху на одну й ту саму відстань швидкість обернено пропорційна часу: $v = \frac{S_0}{t}$, де S_0 — постійна величина.

Приклад 5. Густина речовини при постійній масі обернено пропорційна її об'єму: $\rho = \frac{m_0}{V}$, де m_0 — постійна величина.

Приклад 6. Об'єм кулі залежить від радіуса кулі. Ця залежність є функцією, яку можна задати формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Приклад 7. Площа поверхні сфери залежить від радіуса сфери. Ця залежність є функцією, яку можна задати формулою $S = 4\pi R^2$.

Переваги аналітичного способу полягають у простоті задання функції, можливості обчислення значення функції за заданим значеннями аргументу, можливості всебічного дослідження властивостей функції.

Недостатня наочність та можлива трудомісткість обчислення значень функції — недоліки аналітичного способу задання функції.

Графічний спосіб

Ми вже знаємо, що графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок координатної площини з координатами $(x;y)$, де $y = f(x)$. Рівність $y = f(x)$ називається рівнянням цього графіка.

Функцію задано графічно, якщо зображено її графік.

Приклад 8. Графіком функціональної залежності $I = \frac{U}{R}$ з урахуванням значень наведених в таблиці 1, є півпряма, зображена на *рисунку 1*.

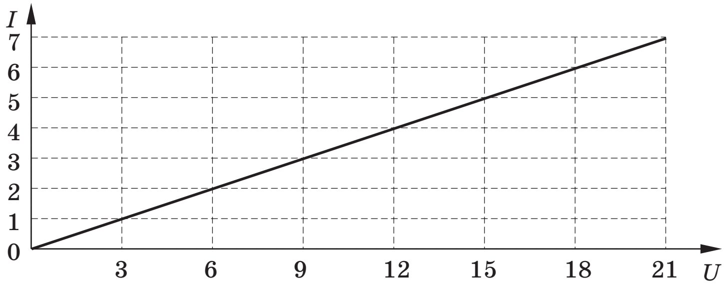


Рис. 1

Функції, що задано аналітично, можуть бути задані і графічно.

До графіка, як і до таблиці неможна безпосередньо застосувати методи дослідження функцій, але графік має беззаперечну перевагу перед іншими способами задання функцій — наочність.

Словесний спосіб

Функція може бути задана словесно або описово.

Приклад 9. У вищій математиці вивчається функція Діріхле*, яка задається таким чином:

$y = 1$ для всіх раціональних чисел;

$y = 0$ для решти чисел**.

Така функція не може бути задана таблично, тому що визначена при всіх числах (а їх безліч); вона також не може бути задана графічно. Аналітичний вираз для цієї функції було знайдено, але він такий складний, що не має практичного застосування. І тільки словесний спосіб коротко і чітко задає функцію Діріхле.

Завдання для самостійного розв'язування

2.12. За допомогою наведеної таблиці задано деяку функцію $y = f(x)$.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	24	15	8	3	0	−1	0	3	8	15	24

* Діріхле Петер Густав (1805–1859) — німецький математик.

** Поняття ірраціонального числа вводиться у 8 класі.

Знайдіть:

а) область визначення функції;

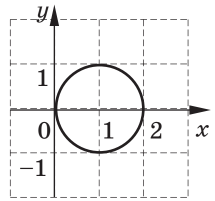
б) множину значень функції;

в) $f(-3)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(5)$;

г) значення аргументу x, при яких значення функції дорівнює 3; 8; 0.

Чи можна цю залежність задати аналітично (за допомогою формули)? Якщо можна, то знайдіть цю формулу.

2.13. Деяку залежність задано за допомогою графіка (*див. рис.*).



Чи є ця залежність функцією? Відповідь обґрунтуйте.

2.14. Задано функцію $y = f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} y = 1 \text{ для всіх додатних чисел;} \\ y = 0 \text{ для } x = 0, \\ y = -1 \text{ для всіх від'ємних чисел.} \end{cases}$$

1) Знайдіть: $f(-4{,}3)$, $f(-1000)$, $f(0)$, $f(5{,}9)$, $f(100{,}2)$;

2) побудуйте графік цієї функції.

3. Парні та непарні функції

Означення. Функція f називається парною, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для всіх x із області визначення виконується рівність: $f(-x) = f(x)$.

Приклади парних функцій: $y_1 = x^2$; $y_2 = |x|$, $y_3 = 1 + x^4$.

Всі ці функції визначені при всіх x і виконуються рівності:

$$y_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = y_1(x);$$

$$y_2(-x) = |-x| = |x| = y_2(x);$$

$$y_3(-x) = 1 + (-x)^4 = 1 + x^4 = y_3(x).$$

Означення. Функція f називається непарною, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для всіх x із області визначення виконується рівність: $f(-x)=-f(x)$.

Приклади непарних функцій:

$$y_1=x;\ y_2=x^3;\ y_3=x\cdot|x|;\ y_4=\frac{1}{x}.$$

Кожна з функцій y_1, y_2, y_3 визначена при всіх x і виконуються рівності:

$$y_1(-x)=-x=-y_1(x);\ y_2(-x)=(-x)^3=-x^3=-y_2(x);$$

$$y_3(-x)=-x\cdot|-x|=-x\cdot|x|=-y_3(x).$$

Функція y_4 визначена при всіх x, крім $x=0$ (область визначення також симетрична відносно нуля) і виконується рівність:

$$y_4(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-y_4(x).$$

Із означення парної функції випливає, що її графік симетричний відносно осі OY (*рис. 2*), а із означення непарної функції випливає, що її графік симетричний відносно початку координат (*рис. 3*).

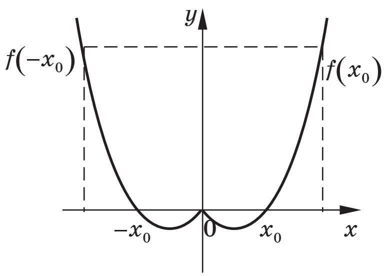


Рис. 2

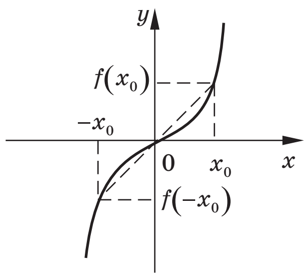


Рис. 3

Означення. Якщо область визначення функції не симетрична відносно нуля і не виконується жодна з рівностей: $f(-x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$, то функція не є парною, ні непарною; такі функції називаються функціями загального виду.

Приклади функцій загального виду:

$$y_1=x^3-1,\ y_2=2x^2+x,\ y_3=\frac{1}{x-2}.$$

Функції y_1 та y_2 визначені при всіх x, але

$$y_1(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1=-(x^3+1),$$

тобто $y_1(-x)\neq y_1(x)$ і $y_1(-x)\neq -y_1(x)$.

Аналогічно

$$y_2(-x)=2(-x)^2+(-x)=2x^2-x,$$

$$y_2(-x)\neq y_2(x) \text{ і } y_2(-x)\neq -y_2(x).$$

Функція y_3 визначена при всіх x, крім $x=2$, отже, її область визначення не є симетричною відносно нуля.

Завдання для самостійного розв'язування

2.15. Доведіть, що функція є парною:

а) $y=5+x^2$; б) $y=3{,}7-x^2$;

в) $y=\frac{1}{2}-x^2$; г) $y=2x^2-x^4$;

д) $y=-5{,}7-x^4$; е) $y=7x^6$.

2.16. Доведіть, що функція є непарною:

а) $y=-5x$; б) $y=2{,}3x$;

в) $y=-2x+x^3$; г) $y=-\frac{2}{x}$;

д) $y=\frac{3{,}5}{x}$; е) $y=x+\frac{1}{x}$.

2.17. Доведіть, що дана функція загального виду:

а) $y=2x-3$; б) $y=1+2x-x^2$;

в) $y=1+x^3$; г) $y=1+\frac{2}{x}$;

д) $y=x^2-5x$; е) $y=\frac{1}{7}x+1$.

2.18. Визначте, які з наведених функцій є парними, непарними, загального виду (відповідь обґрунтуйте):

а) $y=4-0{,}5x^2$; б) $y=4x-0{,}5x^2$;

в) $y=4x-0{,}5x^3$; г) $y=\frac{x^2-1}{x}$;

д) $y=5x^2$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Визначте, які з наведених функцій є парними, непарними, загального виду (відповідь обґрунтуйте):	
а) $y=5x-7$;	а) $y=1{,}5-3x^2$;
б) $y=0{,}5x^2-2$;	б) $y=7-2x$;
в) $y=x-\dfrac{2}{x}$;	в) $y=2x+\dfrac{1}{x}$;
г) $y=4x^4-3x^2$	г) $y=4x^2-5x^4$

4. Зростання й спадання функцій

Розглянемо функцію $y=2x-5$. Для цієї функції $y(1)=-3$; $y(2)=-1$; $y(3)=1$. Тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається зростаючою на деякій множині *P*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$ для будь-яких x_1, x_2 із множини *P*).

Отже, функція $y=2x-5$ є зростаючою при всіх x.

Розглянемо функцію $y=-3x+5$. Для цієї функції $y(1)=2$; $y(2)=-1$; $y(3)=-4$. Тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається спадною на деякій множині *P*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_1<x_2$, то $f(x_1)>f(x_2)$ для будь-яких x_1, x_2 із множини *P*).

Отже, функція $y=-3x+5$ є спадною при всіх x.

Графік зростаючої функції «йде вгору» (*рис. 4*), а спадної — «спускається вниз» (*рис. 5*).

Означення. Проміжки, на яких функція або тільки зростає, або тільки спадає, називаються проміжками монотонності.

Приклад. На *рисунку 6* зображено графік функції $y=f(x)$, яка задана на множині $[-2;5]$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x функція:

а) зростає;

б) спадає;

в) набуває найбільшого значення;

г) набуває найменшого значення.

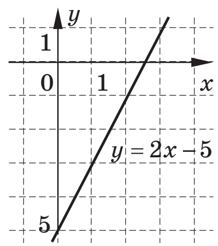


Рис. 4

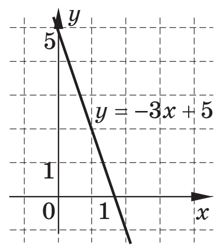


Рис. 5

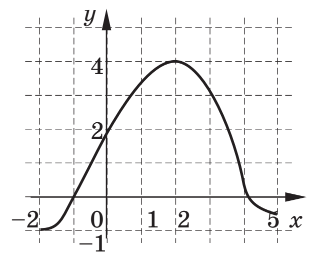


Рис. 6

Розв'язання

За рисунком видно, що при $x\in(-2;2)$ графік функції «йде вгору», тобто функція зростає; якщо $x\in(2;5)$, графік функції «спускається вниз», тобто функція спадає.

Найбільше значення функції дорівнює 4 і досягається при $x=2$; найменше значення функції дорівнює -1 і досягається при $x=-2$.

Відповідь. Функція зростає при $x\in(-2;2)$; спадає при $x\in(2;5)$; при $x=2$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 4; при $x=-2$ набуває найменшого значення, що дорівнює -1.

Розглянемо поняття швидкості змінювання (зростання або спадання) лінійної функції — функції, що задається формулою $y=kx+b$.

Означення. Нехай x_1, x_2 — будь-які аргументи функції, y_1, y_2 — відповідні значення цієї функції. Швидкістю змінювання лінійної функції називається величина *k*, яка показує у скільки разів різниця y_2-y_1, більша від різниці x_2-x_1. При цьому, якщо $k>0$, то функція зростає, якщо $k<0$, — функція спадає.

Приклад. Знайти швидкість змінювання функції:

а) $y=2x-5$.

Розв'язання

Нехай $x_1=1$, $x_2=2$. Тоді $y_1=-3$, $y_2=-1$.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-(-3)}{2-1}=2.$$

Відповідь. Функція зростає зі швидкістю 2.

б) $y=-3x+5$.

Розв'язання

Нехай $x_1=1$, $x_2=2$. Тоді $y_1=2$, $y_2=-1$.

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-1-2}{2-1}=-3.$

Відповідь. Функція спадає зі швидкістю 3.

Зауваження. Із розглянутих прикладів можна зробити висновок, що швидкість змінювання лінійної функції $y=kx+b$ дорівнює коефіцієнту k. При $k>0$ функція зростає зі швидкістю k; при $k<0$, функція спадає зі швидкістю $|k|$.

Зверніть увагу! Тільки у випадку лінійної функції величина k є постійною, тобто не змінюється залежно від обраних значень x_1 і x_2.

Завдання для самостійного розв'язування

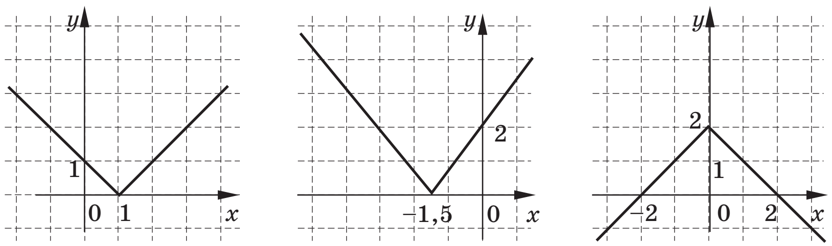
2.19. З'ясуйте, зростає чи спадає функція:

а) $y=2x$; б) $y=2x-3$;
в) $y=-2x+3$; г) $y=\dfrac{1}{2}x$;
д) $y=\dfrac{1}{2}x-3$; е) $y=-\dfrac{1}{2}x+3$.

2.20. Знайдіть швидкість зростання або спадання функції:

а) $y=x+3$; б) $y=x-2$;
в) $y=-x+3$; г) $y=-x-2$;
д) $y=2x-3$; е) $y=-\dfrac{1}{2}x-2$.

2.21. Користуючись графіком функції, що зображений на *рисунку 7*, знайдіть проміжки зростання і спадання функції.



а) б) в)

Рис. 7

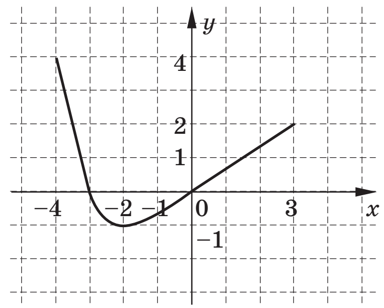
Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
1. Укажіть проміжки зростання функції	
$y=2x-3$	$y=\dfrac{1}{2}x+2$
2. Дослідіть на монотонність функцію:	
а) $y=3-\dfrac{1}{2}x$; б) $y=-3+2x$; в) $y=5$	а) $y=-\dfrac{1}{4}x+5$; б) $y=6+3x$; в) $y=-6$

Контрольна роботаз теми «Функції та їх властивості»

Варіант 1

1. Знайдіть область визначення функції:
   а) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|-2}$; б) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+1}$.
2. Знайдіть множину значень функції $f(x)=3|x-2|+5$.
3. Графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ проходить через точку $A(-4;2)$. Знайдіть k.
4. На *рисунку* зображений графік функції $y=f(x)$, яка визначена на множині $[-4;3]$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x функція:
   а) зростає;
   б) спадає;
   в) набуває найбільшого значення;
   г) набуває найменшого значення.



5. Дослідіть на парність функцію:
   а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; б) $f(x)=|x|+1$;
   в) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

Варіант 2

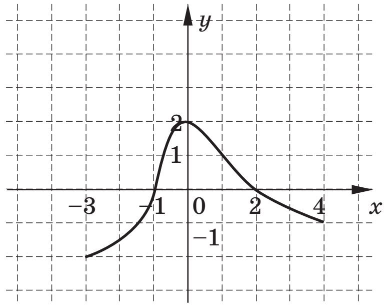
1. Знайдіть область визначення функції:

а) $f(x)=\dfrac{3x-6}{|x|+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x+4}$.

2. Знайдіть множину значень функції $f(x)=1+\dfrac{1}{2}|x+2|$.

3. Графік функції $y=kx+2$ проходить через точку $B(-1;3)$. Знайдіть k.

4. На *рисунку* зображений графік функції $y=f(x)$, яка визначена на множині $[-3;4]$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x функція:



а) зростає;

б) спадає;

в) набуває найменшого значення;

г) набуває найбільшого значення.

5. Дослідіть на парність функцію:

а) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-1}$; б) $f(x)=x^3+x$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

§ 2. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ МОДУЛІ

1. Графіки функцій $y=|x|$, $y=|kx+b|$

Ми знаємо, що графіками функцій $y=kx$ (пряма пропорційність) і $y=kx+b$ (лінійна функція) є пряма.

Пригадаємо, що графіком функції $y=x$ є бісектриса I і III координатних кутів, а графіком функції $y=-x$ є бісектриса II і IV координатних кутів (*рис. 8*).

Побудуємо графік функції $y=|x|$. Пригадаємо означення модуля числа:

$$|x|=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\ge 0,\\ -x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$$

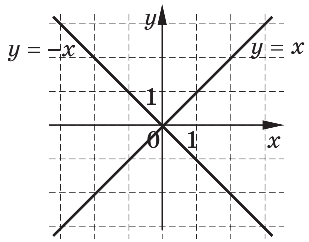


Рис. 8

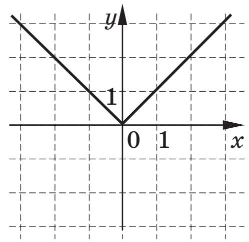


Рис. 9

Користуючись рисунком 8 і означенням модуля числа, дістанемо графік функції $y=|x|$ (*рис. 9*).

Таким чином, графік функції $y=|x|$ — це ламана, яка складається з двох півпрямих, одна з них — бісектриса першого, а друга — бісектриса другого координатних кутів.

Розглянемо ще декілька прикладів графіків функцій, що містять модуль.

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=|x-2|$.

Розв'язання

Введемо допоміжну функцію $y_0=x-2$ і побудуємо її графік. Функція $y_0=x-2$ — лінійна, її графік — пряма, що проходить через точки $(2;0)$ і $(0;-2)$ (*рис. 10*).

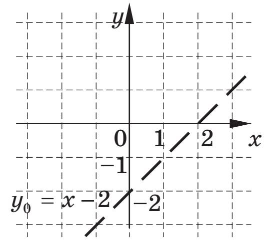


Рис. 10

За означенням модуля числа, маємо:

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ якщо } x-2\ge 0,\\ -(x-2), \text{ якщо } x-2<0.\end{cases}$$

За допомогою рисунка 10 встановлюємо, що $x-2\ge 0$, якщо $x\ge 2$; $x-2<0$, якщо $x<2$.

Тобто

$$y=\begin{cases}y_0, \text{ якщо } x\ge 2,\\ -y_0, \text{ якщо } x<2\end{cases} \text{ або } y=\begin{cases}x-2, \text{ якщо } x\ge 2,\\ -x+2, \text{ якщо } x<2.\end{cases} \qquad (*)$$

Введемо ще одну допоміжну функцію $y_1 = -x + 2$ і побудуємо її графік (*рис. 11*).

Зіставляючи графіки функцій на рисунках 10 і 11 і враховуючи умову (*), дістанемо графік функції $y = |x-2|$ (*рис. 12*).

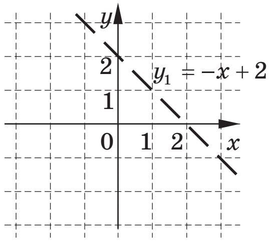


Рис. 11

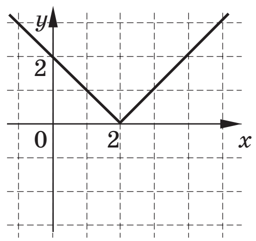


Рис. 12

б) $y = |x+2|$.

Розв'язання

Введемо допоміжну функцію $y_0 = x + 2$ і побудуємо її графік (*рис. 13*).

За означенням модуля числа, маємо:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ якщо } x+2 \geq 0, \\ -(x+2), \text{ якщо } x+2 < 0. \end{cases}$$

За допомогою рисунка 13 встановлюємо, що $x+2 \geq 0$, якщо $x \geq -2$; $x+2 < 0$, якщо $x < -2$.

Тобто

$$y = \begin{cases} y_0, \text{ якщо } x \geq -2, \\ -y_0, \text{ якщо } x < -2 \end{cases} \text{ або } y = \begin{cases} x+2, \text{ якщо } x \geq -2, \\ -x-2, \text{ якщо } x < -2. \end{cases}$$

Введемо ще одну допоміжну функцію $y_1 = -x - 2$ і побудуємо її графік (*рис. 14*).

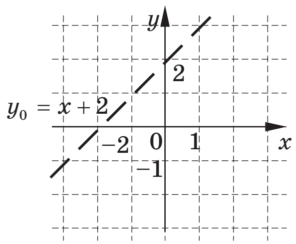


Рис. 13

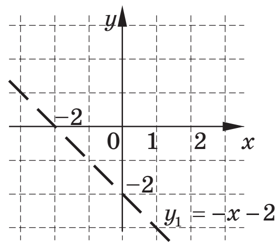


Рис. 14

Зіставляючи графіки функцій на рисунках 13 і 14 і враховуючи умову (*), дістанемо графік функції $y = |x+2|$ (*рис. 15*).

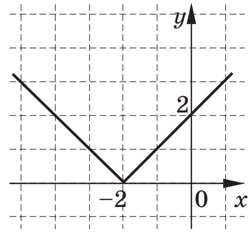


Рис. 15

Завдання. Порівняйте графіки функцій $y = |x-2|$ і $y = |x+2|$ (рисунки 12 і 15) з графіком функції $y = |x|$ (рис. 9).

Зробіть висновок.

в) $y = |2x-5|$.

Розв'язання

Введемо допоміжну функцію $y_0 = 2x - 5$ і побудуємо її графік (*рис. 16*).

За означенням модуля числа, маємо:

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, \text{ якщо } 2x-5 \geq 0, \\ -(2x-5), \text{ якщо } 2x-5 < 0. \end{cases}$$

За допомогою рисунка 16 встановлюємо, що $2x-5 \geq 0$, якщо $x \geq 2{,}5$; $2x-5 < 0$, якщо $x < 2{,}5$.

Тобто

$$y = \begin{cases} y_0, \text{ якщо } x \geq 2{,}5, \\ -y_0, \text{ якщо } x < 2{,}5 \end{cases} \text{ або } y = \begin{cases} 2x-5, \text{ якщо } x \geq 2{,}5, \\ -(2x-5), \text{ якщо } x < 2{,}5. \end{cases} \quad (*)$$

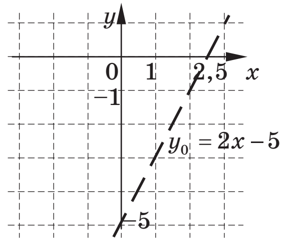


Рис. 16

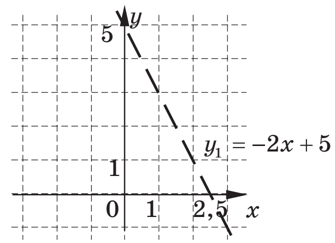


Рис. 17

Введемо ще одну допоміжну функцію $y_1 = -2x + 5$ і побудуємо її графік (*рис. 17*).

Зіставляючи графіки функцій на рисунках 16 і 17 і враховуючи умову (*) дістанемо графік функції $y = |2x - 5|$ (*рис. 18*).

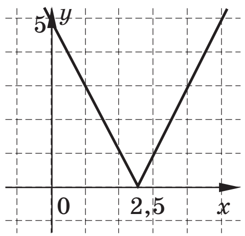


Рис. 18

г) $y = |2x + 5|$.

Введемо допоміжну функцію $y_0 = 2x + 5$ і побудуємо її графік (*рис. 19*).

За означенням модуля числа, маємо:

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, \text{ якщо } 2x+5 \geq 0, \\ -(2x+5), \text{ якщо } 2x+5 < 0. \end{cases}$$

За допомогою рисунка 19 встановлюємо, що $2x+5 \geq 0$, якщо $x \geq -2{,}5$; $2x+5 < 0$, якщо $x < -2{,}5$.

Тобто

$$y = \begin{cases} y_0, \text{ якщо } x \geq -2{,}5, \\ -y_0, \text{ якщо } x < -2{,}5 \end{cases} \text{ або } y = \begin{cases} 2x+5, \text{ якщо } x \geq -2{,}5, \\ -(2x+5), \text{ якщо } x < -2{,}5. \end{cases} \quad (*)$$

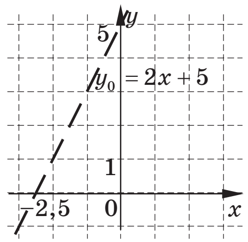


Рис. 19

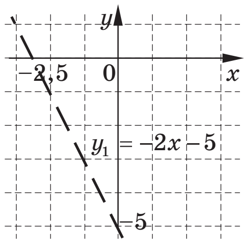


Рис. 20

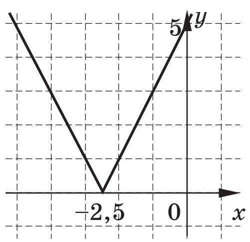


Рис. 21

Введемо ще одну допоміжну функцію $y_1 = -2x - 5$ і побудуємо її графік (*рис. 20*).

Зіставляючи графіки функцій на рисунках 18 і 19 та враховуючи умову (*), дістанемо графік функції $y = |2x + 5|$ (*рис. 21*).

Завдання. Побудуйте графік функції $y = |2x|$ і порівняйте з ним графіки функцій $y = |2x - 5|$ і $y = |2x + 5|$ (рис. 18 і 21).

Завдання для самостійного розв'язування

2.22. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2x$; б) $y = 2x - 3$;

в) $y = -2x + 3$; г) $y = \frac{1}{2}x$;

д) $y = \frac{1}{2}x - 3$; е) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

2.23. Побудуйте графік функції:

а) $y = |2x|$; б) $y = |2x - 3|$;

в) $y = |2x + 3|$.

Порівняйте графіки цих функцій і зробіть висновок.

2.24. Побудуйте графік функції:

а) $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$; б) $y = \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$;

в) $y = \left|\frac{1}{2}x + 3\right|$.

Порівняйте графіки цих функцій і зробіть висновок.

2.25. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x + 3|$; б) $y = |x - 3|$;

в) $y = -|x + 3|$; г) $y = -|x - 3|$;

д) $y = -|3x - 5|$; е) $y = -|3x + 5|$;

ж) $y = -|5 - x|$; з) $y = -|5 + x|$.

2.26. Побудуйте графік функції:

а) $y = |3x - 5|$; б) $y = |3x + 5|$;

в) $y = \left|4 - \frac{1}{2}x\right|$; г) $y = \left|4 + \frac{1}{2}x\right|$;

д) $y = -|3x - 5|$; е) $y = -|3x + 5|$;

ж) $y = -\left|4 - \frac{1}{2}x\right|$; з) $y = -\left|4 + \frac{1}{2}x\right|$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Побудуйте графік функції:	
а) $y = \|x-4\|$;	а) $y = \|x-5\|$;
б) $y = \|4+x\|$;	б) $y = \|5+x\|$;
в) $y = \|5-x\|$;	в) $y = \|-4-2x\|$;
г) $y = \|4-2x\|$;	г) $y = \|6-2x\|$;
д) $y = \|4+2x\|$;	д) $y = \|6+2x\|$;
е) $y = \left\|5-\frac{1}{2}x\right\|$	е) $y = \left\|4-\frac{1}{2}x\right\|$

2. Побудова графіків функцій виду $y = |ax+b| + |cx+d|$

Розглянемо алгоритм побудови графіків функцій такого виду на прикладах.

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y = |x+3| + |x-2|$.

Розв'язання

1) Введемо допоміжні функції $y_1 = |x+3|$ та $y_2 = |x-2|$ і побудуємо їхні графіки на одній координатній площині (*рис. 22*).

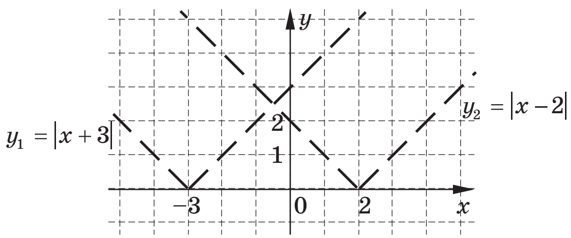


Рис. 22

2) Назвемо точки, в яких допоміжні функції дорівнюють нулю, контрольними.

$y_1 = 0$, якщо $x = -3$; $y_2 = 0$, якщо $x = 2$. Складемо таблицю значень функцій y_1, y_2, y у контрольних точках.

Таблиця 1

x	y_1	y_2	$y = y_1 + y_2$
–3	0	5	–5
2	5	0	5

3) Контрольні точки розбивають область визначення функції на три проміжки. Розглянемо поведінку функцій y_1, y_2, $y = y_1 + y_2$ на кожному з них.

Якщо $x \le -3$, то функція $y_1 = |x+3| = -x-3$ спадає (швидкість спадання дорівнює 1), функція $y_2 = |x-2| = 2-x$ також спадає з такою ж швидкістю. Швидкість спадання функції $y = y_1 + y_2 = -2x-1$ дорівнює 2. Отже, графіком функції $y = y_1 + y_2$ є промінь з початком у точці $(-3; 0)$.

Якщо $-3 < x < 2$, то функція $y_1 = |x+3| = x+3$ зростає з постійною швидкістю, що дорівнює 1, функція $y_2 = |x-2| = 2-x$ спадає зі швидкістю 1. Отже, функція $y = y_1 + y_2$ не зростає і не спадає, а набуває постійного значення, що дорівнює 5.

Якщо $x \ge 2$, то функція y_1 зростає (швидкість дорівнює 1), y_2 також зростає. Отже, функція $y = y_1 + y_2$ на цьому проміжку зростає з постійною швидкістю, що дорівнює 2. При $x \ge 2$ графіком функції $y = y_1 + y_2$ є промінь з початком у точці $(2; 0)$.

4) Для побудови графіка функції $y = y_1 + y_2$ при $x \le -3$ і $x \ge 2$ (відповідних променів) візьмемо по одній точці з кожного з цих інтервалів. Нехай це будуть точки $x = -4$ і $x = 3$ (назвемо такі точки додатковими). Складемо таблицю додаткових значень функції y:

Таблиця 2

x	$y = y_1 + y_2$
–4	7
3	7

5) Побудуємо графік функції $y = |x+3| + |x-2|$ (*рис. 23*).

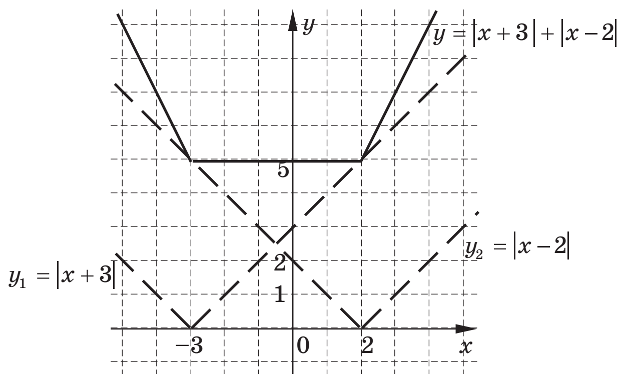


Рис. 23

Висновок. Графік функції виду $y=|ax+b|+|cx+d|$ — ламана.

б) $y=|2x-3|+|x-4|$.

Розв'язання

1) Введемо допоміжні функції $y_1=|2x-3|$ та $y_2=|x-4|$ і побудуємо їхні графіки на одній координатній площині (на *рисунку 24* ці графіки зображено пунктиром).

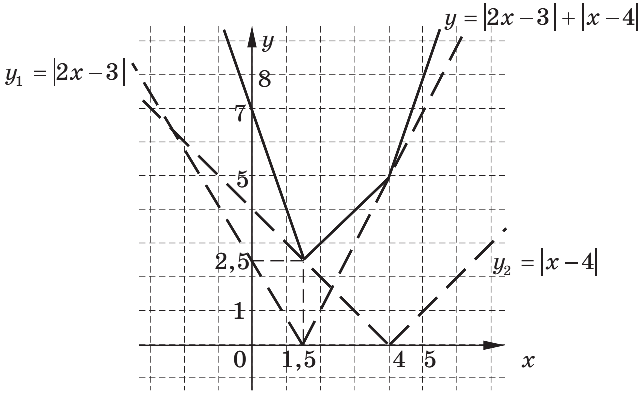


Рис. 24

2) $y_1=0$, якщо $x=1{,}5$;
$y_2=0$, якщо $x=4$ — контрольні точки.
Складемо таблицю значень функції в контрольних точках.

Таблиця 1

x	y_1	y_2	$y=y_1+y_2$
1,5	0	2,5	2,5
4	5	0	5

3) Виберемо додаткові точки: $x=0$ і $x=5$. Складемо таблицю додаткових значень функції y.

Таблиця 2

x	$y=y_1+y_2$
0	7
5	8

4) За даними таблиць 1 і 2 і з урахуванням того, що графік функції $y=|2x-3|+|x-4|$ — ламана, будуємо графік цієї функції (рис. 24).

Зауваження. Замість таблиць 1 і 2 можна скласти одну таблицю, за допомогою якої можна знаходити значення функції і в контрольних, і в додаткових точках.

в) $y=|x+4|+\left|\frac{1}{2}x-2\right|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1=|x+4|$ та $y_2=\left|\frac{1}{2}x-2\right|$ (їхні графіки на *рисунку 25* зображено пунктиром).

2) Контрольні точки: $x=-4$; $x=4$.

3) Додаткові точки: $x=-5$ і $x=5$.

4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	$y=y_1+y_2$
–5	1	4,5	5,5
–4	0	4	4
4	8	0	8
5	9	0,5	9,5

5) Графік функції $y=|x+4|+\left|\frac{1}{2}x-2\right|$ на рисунку 25 зображений суцільною лінією.

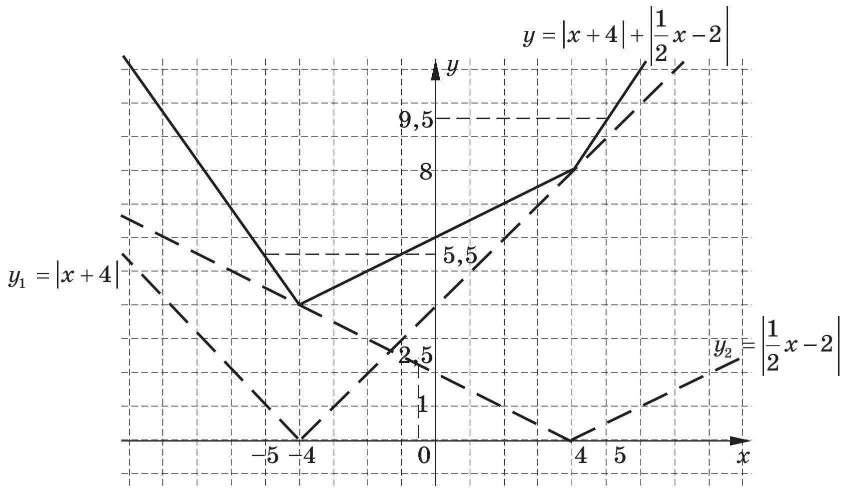


Рис. 25

г) $y=|x+2|+|x-2|+|4-x|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1=|x+2|$, $y_2=|x-2|$, $y_3=|4-x|$.
2) Контрольні точки: $x=-2$; $x=2$; $x=4$.
3) Додаткові точки: $x=-3$; $x=5$.
4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	y_3	$y=y_1+y_2+y_3$
−3	1	5	7	13
−2	0	4	6	10
2	4	0	2	6
4	6	2	0	8
5	7	3	1	11

5) Графік функції $y=|x+2|+|x-2|+|4-x|$ (*рис. 26*).

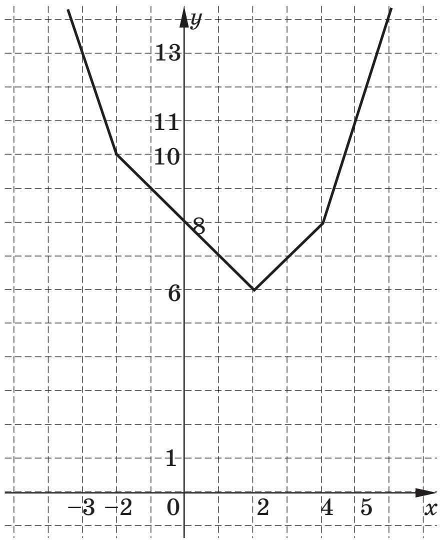


Рис. 26

Завдання для самостійного розв'язування

2.27. Побудуйте графік функції:

а) $y=|x+2|+|x-2|$; б) $y=|x+3|+|x-4|$;
в) $y=|-x+2|+|3-x|$; г) $y=|x|+|5-x|$.

2.28. Побудуйте графік функції:

а) $y=|2-x|+|3x|$; б) $y=|x+3|+|2x-5|$;
в) $y=|x+1|+|3x-2|$; г) $y=|x|+|5-2x|$.

2.29. Побудуйте графік функції:

а) $y=|2-x|+\left|\frac{1}{2}x\right|$; б) $y=|x+3|+\left|\frac{1}{2}x-1\right|$;
в) $y=|x+1|+\left|2-\frac{1}{3}x\right|$; г) $y=|x|+\left|-1-\frac{1}{2}x\right|$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Побудуйте графік функції:	
а) $y=\lvert x+4\rvert+\lvert x-4\rvert$;	а) $y=\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$;
б) $y=\lvert 2x+3\rvert+\lvert x-2\rvert$;	б) $y=\lvert x+2\rvert+\lvert 2x-3\rvert$;
в) $y=\lvert x+1\rvert+\left\lvert\frac{1}{2}x-1\right\rvert$;	в) $y=\left\lvert\frac{1}{2}x+1\right\rvert+\lvert x-1\rvert$;
г)* $y=\lvert x+2\rvert+\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$	г)* $y=\lvert x-2\rvert+\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert$

3. Побудова графіків функцій виду $y=|ax+b|-|cx+d|$

Побудова графіка функції виду $y=|ax+b|-|cx+d|$ може бути зведена до побудови графіка функції $y=|ax+b|+\left(-|cx+d|\right)$.

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=|x+3|-|x-4|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1=|x+3|$ та $y_2=-|x-4|$ (їх графіки на *рисунку 27* зображено пунктиром).
2) Контрольні точки: $x=-3$, $x=4$.
3) Виберемо додаткові точки: $x=-4$, $x=5$.
4) Таблиця значень функцій в контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	$y=y_1+y_2$
−4	1	−8	−7
−3	0	−7	−7
4	7	0	7
5	8	−1	7

5) Графік функції $y=|x+3|-|x-4|$ на рисунку 27 зображено суцільною лінією.

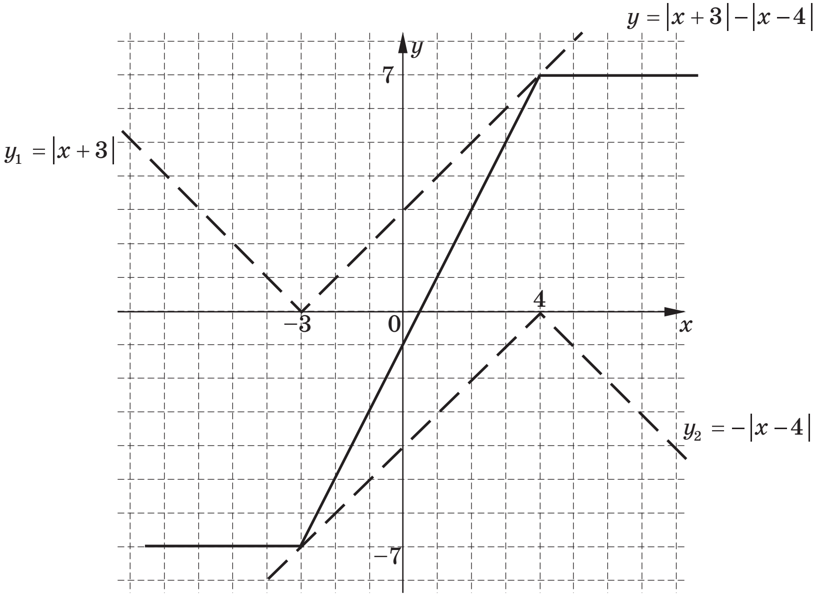


Рис. 27

б) $y=|2x-3|-|x+1|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1=|2x-3|$ та $y_2=-|x+1|$ (їх графіки на *рисунку 28* зображені пунктиром).
2) Контрольні точки: $x=1{,}5$, $x=-1$.
3) Додаткові точки: $x=-2$, $x=2$.
4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	$y=y_1+y_2$
−2	7	−1	6
−1	5	0	5
1,5	0	−2,5	−2,5
2	1	−3	−2

5) Графік функції $y=|2x-3|-|x+1|$ на рисунку 28 зображено суцільною лінією.

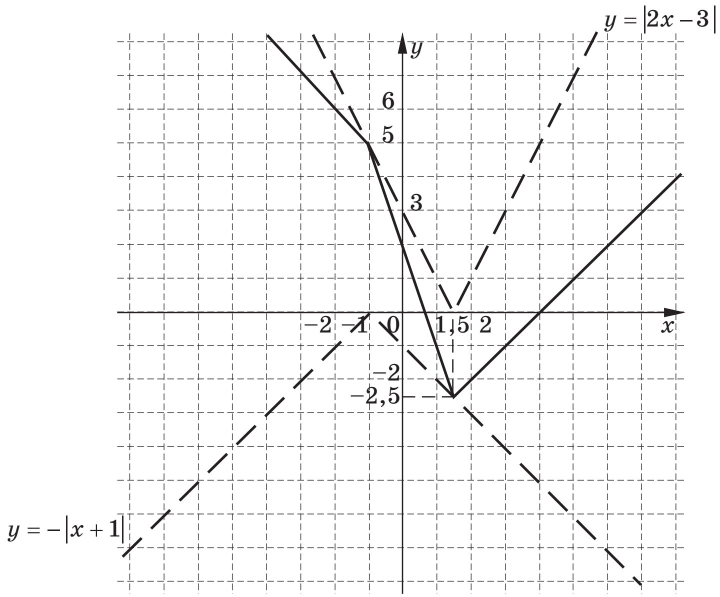


Рис. 28

в) $y=-|x+2|+|x-1|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1=-|x+2|$ та $y_2=|x-1|$ (їх графіки на *рисунку 29* зображені пунктиром).

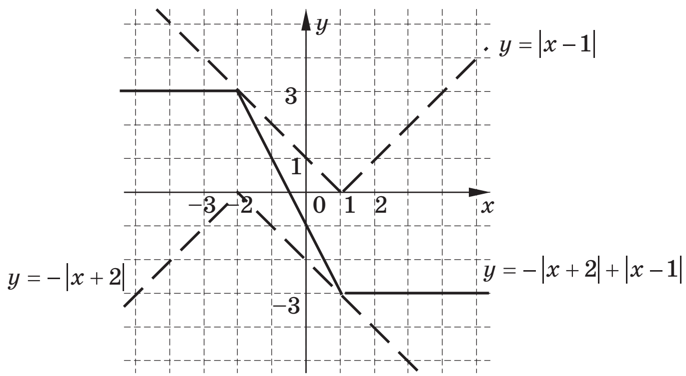


Рис. 29

2) Контрольні точки: $x=-2$ і $x=1$.
3) Додаткові точки: $x=-3$ і $x=2$.

4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	$y = y_1 + y_2$
–3	–1	4	3
–2	0	3	3
1	–3	0	–3
2	–4	1	–3

5) Графік функції $y = -|x+2| + |x-1|$ на рисунку 29 зображено суцільною лінією.

г) $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| - |x-4|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1 = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$ та $y_2 = -|x-4|$.

2) Контрольні точки: $x = 2$ і $x = 4$.

3) Додаткові точки: $x = 0$ і $x = 6$.

4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	$y = y_1 + y_2$
0	1	4	–3
2	0	–2	–2
4	1	0	1
6	2	–2	0

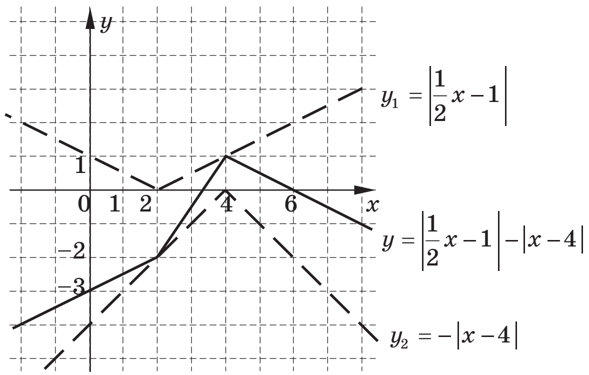


Рис. 30

5) Графік функції $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| - |x-4|$ на *рисунку 30* зображено суцільною лінією.

д) $y = |x+4| - |x| - |x-2|$.

Розв'язання

1) Допоміжні функції: $y_1 = |x+4|$, $y_2 = -|x|$, $y_3 = -|x-2|$.

2) Контрольні точки: $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$.

3) Додаткові точки: $x = -5$ і $x = 3$.

4) Таблиця значень функцій у контрольних та додаткових точках:

x	y_1	y_2	y_3	$y = y_1 + y_2 + y_3$
–5	1	–5	–7	–11
–4	0	–4	–6	–10
0	4	0	–2	2
2	6	–2	0	4
3	7	–3	–1	3

5) Графік функції $y = |x+4| - |x| - |x-2|$ зображено на *рисунку 31*.

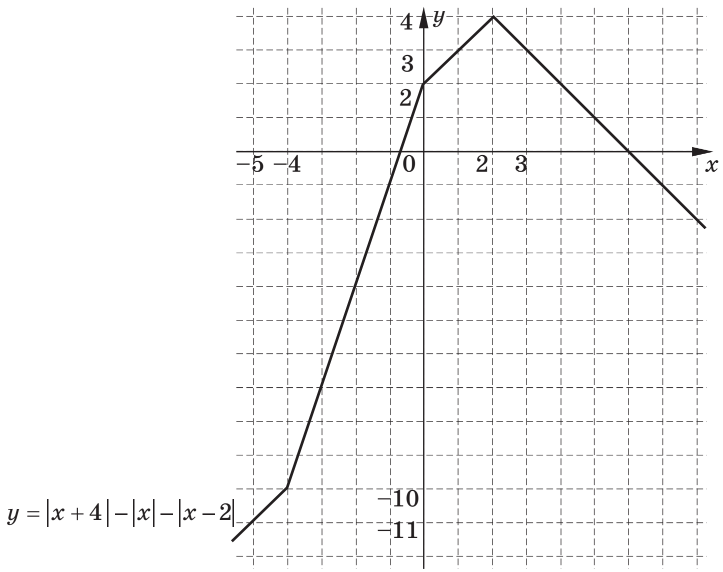


Рис. 31

Завдання для самостійного розв'язування

2.30. Побудуйте графік функції:

а) $y=|x+3|-|x-2|$; б) $y=|x-2|+|x+3|$;

в) $y=|x+2|-|x-3|$; г) $y=|x-3|-|x+2|$.

2.31. Побудуйте графік функції:

а) $y=|2x-5|-|x+1|$; б) $y=|x+1|-|2x-5|$;

в) $y=|2x+5|-|x-1|$; г) $y=|x-1|-|2x+5|$.

2.32. Побудуйте графік функції:

а) $y=\left|\frac{1}{2}x-2\right|-|x+2|$; б) $y=|x+2|-\left|\frac{1}{2}x-2\right|$;

в) $y=\left|\frac{1}{2}x+2\right|-|x-2|$; г) $y=|x-2|-\left|\frac{1}{2}x+2\right|$.

2.33. Побудуйте графік функції:

а) $y=\left|\frac{1}{2}x-2\right|-|2x-3|$; б) $y=|2x-3|-\left|\frac{1}{2}x-2\right|$;

в) $y=\left|\frac{1}{2}x-2\right|-|2x+3|$; г) $y=|2x+3|-\left|\frac{1}{2}x-2\right|$;

д) $y=\left|\frac{1}{2}x+2\right|-|2x+3|$; е) $y=|2x+3|-\left|\frac{1}{2}x+2\right|$;

ж) $y=\left|\frac{1}{2}x+2\right|-|2x-3|$; з) $y=|2x-3|-\left|\frac{1}{2}x+2\right|$.

2.34. Побудуйте графік функції:

а) $y=|x+3|-|x+1|-|x-2|$; б) $y=|x+3|+|x+1|-|x-2|$;

в) $y=|2x-5|-|x+1|-|x-1|$; г) $y=|2x+5|+|x+1|-|x-1|$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Побудуйте графік функції:	
а) $y=\|x+4\|-\|x-4\|$;	а) $y=\|x-4\|-\|x+4\|$;
б) $y=\|2x+3\|-\|x-2\|$;	б) $y=\|x+2\|-\|2x+3\|$;
в) $y=\|x+1\|-\left\|\frac{1}{2}x-1\right\|$;	в) $y=\left\|\frac{1}{2}x+1\right\|-\|x-1\|$;
г)* $y=\|x+2\|-\|x\|-\|x-1\|$	г)* $y=\|x+1\|-\|x\|-\|x-2\|$

§ 3. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

1. Розв'язування рівнянь виду $|ax+b|=c$, $|ax+b|=cx+d$

Розв'язати графічно рівняння $|ax+b|=c$ або $|ax+b|=cx+d$ — це означає знайти абсциси точок перетину графіків функцій $y=|ax+b|$ та $y=c$ або $y=cx+d$. Графічний спосіб розв'язування рівнянь достатньо наочний, він дозволяє знайти корені рівняння, вказати їх кількість.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x-2|=3$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|x-2|$ та $y=3$ (*рис. 32*).

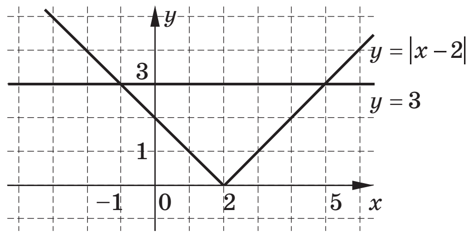


Рис. 32

Відповідь. −1; 5.

б) $|2x+5|=3$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|2x+5|$ та $y=3$ (*рис. 33*).

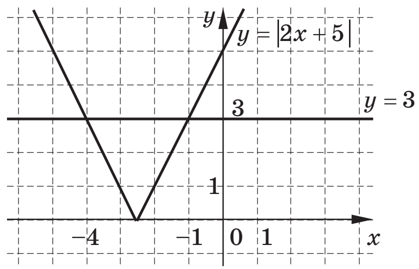


Рис. 33

в) $|2x-5|=0{,}5x+2{,}5$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|2x-5|$ та $y=0{,}5x+2{,}5$ (*рис. 34*).

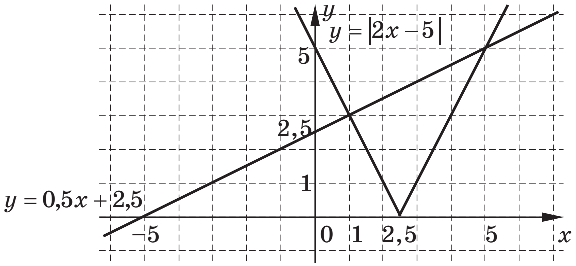


Рис. 34

Відповідь. 1; 5.

г) $|2x-5|=-2x+7$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|2x-5|$ та $y=-2x+7$ (*рис. 35*).

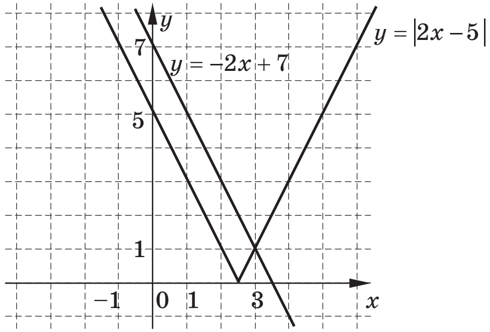


Рис. 35

Графіки функцій $y=|2x-5|$ та $y=-2x+7$ перетинаються в одній точці, отже рівняння $|2x-5|=-2x+7$ має один корінь: $x=3$.

Відповідь. 3.

д) $|2x-5|=-2x+3$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|2x-5|$ та $y=-2x+3$ (*рис. 36*).

Графіки функцій $y=|2x-5|$ та $y=-2x+3$ не перетинаються. Це означає, що рівняння $|2x-5|=-2x+3$ коренів не має.

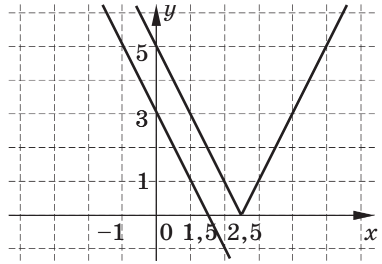


Рис. 36

Відповідь. Коренів немає.

2. Розв'язування рівнянь виду $|x-a|\pm|x-b|=c$

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $|x+2|+|x-4|=8$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|x+2|+|x-4|$ та $y=8$ (*рис. 37*).

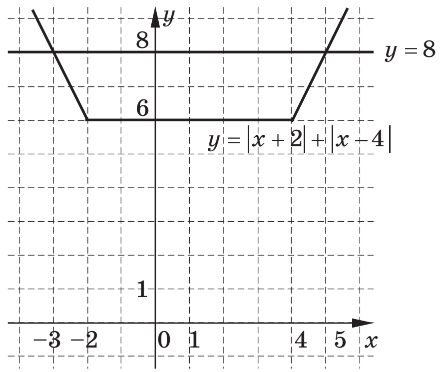


Рис. 37

Відповідь. −3; 5.

б) $|x+2|+|x-4|=6$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|x+2|+|x-4|$ та $y=6$ (*рис. 38*).

Ми бачимо, що при $-2 \le x \le 4$ графіки цих функцій співпадають. Це означає, що рівняння $|x+2|+|x-4|=6$ має безліч коренів.

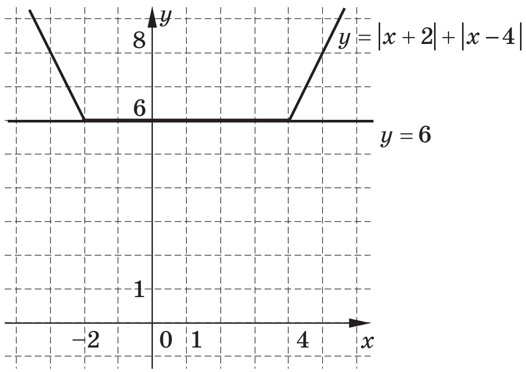


Рис. 38

Відповідь. $[-2; 4]$.

в) $|x+2|+|x-4|=2$.

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=|x+2|+|x-4|$ та $y=2$ (*рис. 39*).

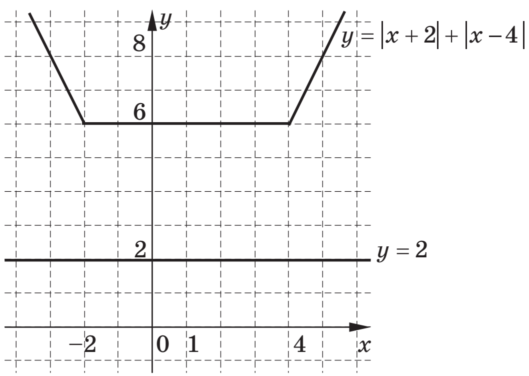


Рис. 39

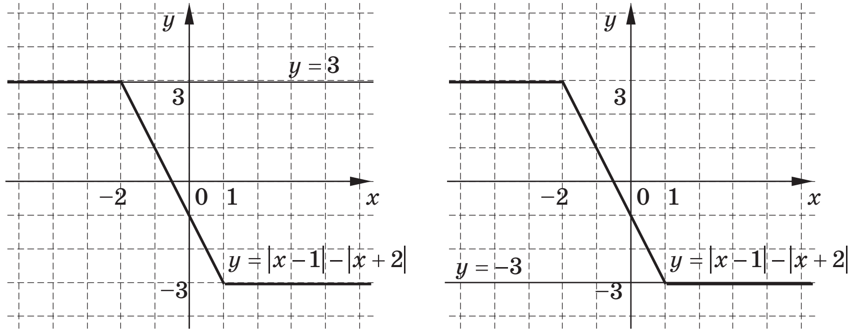
Графіки функцій $y=|x+2|+|x-4|$ та $y=2$ не мають спільних точок, отже, рівняння $|x+2|+|x-4|=2$ коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

Приклади рівнянь, які мають безліч коренів:

а) $|x-1|-|x+2|=3$; б) $|x-1|-|x+2|=-3$.

Розв'язання цих рівнянь показано на *рисунку 40*.



а) б)

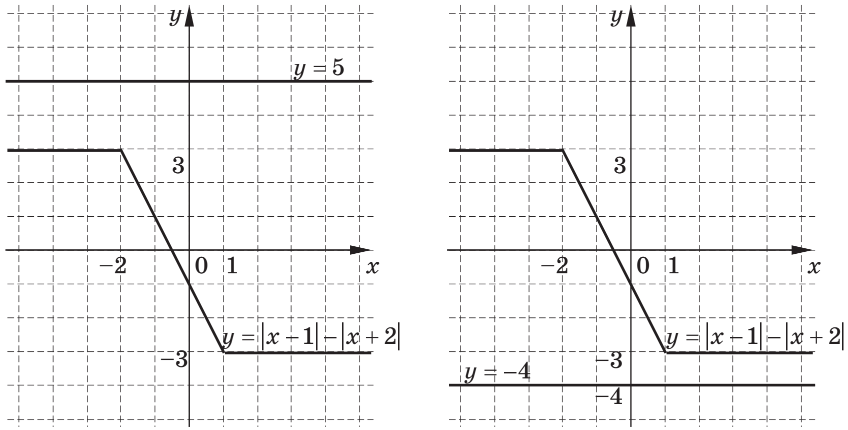
Рис. 40

Відповідь. $(-\infty; -2]$. *Відповідь.* $[1; +\infty)$.

Приклади рівнянь, які не мають коренів:

а) $|x-1|-|x+2|=5$; б) $|x-1|-|x+2|=-4$.

Розв'язання цих рівнянь показано на *рисунку 41*.



а) б)

Рис. 41

Відповідь. Коренів немає. *Відповідь.* Коренів немає.

Приклад рівняння, яке має один корінь: $|x-1|-|x+2|=1$.

Розв'язання цього рівняння показано на *рисунку 42*.

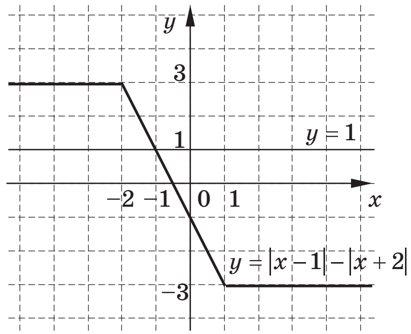


Рис. 42

Відповідь. −1.

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'яжіть рівняння, використовуючи графічний спосіб:

2.35. а) $|x-1|=7$; б) $|2+x|=5$;
в) $|x-0{,}5|=4{,}5$; г) $|x-3|=0$;
д) $|x-4|=-5$; е) $|5-x|=1$.

2.36. а) $|2x-3|=5$; б) $|2x+3|=5$;
в) $|2x-3|=-5$.

2.37. а) $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=2$; б) $\left|\frac{1}{2}x+1\right|=3$;
в) $\left|\frac{1}{2}x+1\right|=-1$.

2.38. а) $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=x-2$; б) $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=3-\frac{1}{2}x$;
в) $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=\frac{1}{2}x-1$; г) $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=-\frac{1}{2}x$.

2.39. а) $|x+2|+|x-1|=5$; б) $|x+2|+|x-1|=3$;
в) $|x+2|+|x-1|=1$; г) $|x+2|+|x-1|=0$.

2.40. а) $|x+2|-|x-1|=5$; б) $|x+2|-|x-1|=3$;
в) $|x+2|-|x-1|=-3$; г) $|x+2|-|x-1|=-4$;
д) $|x+2|-|x-1|=1$; е) $|x+2|-|x-1|=0$.

2.41. а) $|x-4|+|x|-|x+4|=0$; б) $|x-4|+|x|-|x+4|=6$;
в) $|x-4|+|x|-|x+4|=-2$; г) $|x-4|+|x|-|x+4|=-4$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Розв'яжіть графічно рівняння:	
а) $\lvert x+4\rvert=6$;	а) $\lvert x-4\rvert=6$;
б) $\lvert 2x-5\rvert=7$;	б) $\lvert 2x+5\rvert=7$;
в) $\left\lvert\frac{1}{2}x-1\right\rvert=x-2$;	в) $\left\lvert\frac{1}{2}x+1\right\rvert=x+2$;
г) $\lvert x+3\rvert+\lvert x+1\rvert=6$;	г) $\lvert x-1\rvert+\lvert x-3\rvert=6$;
д) $\lvert x+3\rvert-\lvert x-3\rvert=6$;	д) $\lvert x-3\rvert-\lvert x+3\rvert=-6$;
е)* $\lvert x+1\rvert+\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert=0$	е)* $\lvert x+2\rvert+\lvert x\rvert+\lvert x-2\rvert=0$

Контрольна робота з теми «Побудова графіків функцій, що містять модулі»

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції:
   а) $y=|3x-6|$; б) $y=-|4-x|$;
   в) $y=|2x+1|+|2x-1|$; г) $y=\left|\frac{1}{2}x-1\right|-\left|\frac{1}{2}x+1\right|$.
2. Розв'яжіть графічно рівняння:
   а) $|5x-3|=8$; б) $|2x-4|=x+1$;
   в) $|x-2|=|1-x|$; г) $|x-3|+|x+2|=6$;
   д) $|x-3|+|x+2|=5$; е) $|x-3|+|x+2|=1$;
   ж)* $|x|-|x-2|=4-|x+2|$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції:
   а) $y=|2x+4|$; б) $y=-|3-x|$;
   в) $y=|3x+6|+|3x-6|$; г) $y=\left|\frac{1}{3}x+1\right|-\left|\frac{1}{3}x-1\right|$.
2. Розв'яжіть графічно рівняння:
   а) $|4x-1|=5$; б) $|2x+4|=1-x$;
   в) $|x+3|=|x+1|$; г) $|x+3|+|x-2|=5$;
   д) $|x+3|+|x-2|=4$; е) $|x+3|+|x-2|=6$;
   ж)* $|x+3|-|x-3|=6-|x|$.

§ 4. ФУНКЦІЇ $y=[x]$ ТА $y=\{x\}$

1. Ціла і дробова частина числа

Кожне дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один із яких — ціле число, а другий — невід'ємний правильний дріб, тобто для кожного дробового числа можна вказати його цілу і дробову частину.

Наприклад, для числа 5,605 число 5 є цілою частиною, а число 0,605 — дробовою частиною. Записують це так:

$$[5{,}605]=5,\ \{5{,}605\}=0{,}605.$$

Число 5,605 знаходиться між числами 5 і 6, які є найближчими цілими числами до 5,605. $5<5{,}605<6$.

Крім того, число 5 — найближче ціле число, яке не перевищує число 5,605. Зазначимо, що $\{5{,}605\}=5{,}605-5=0{,}605$.

Означення. Цілою частиною числа a (позначення $[a]$) найближче до a ціле число, яке не перевищує a.

Приклади:

1) $[7{,}31]=7$, оскільки $7<7{,}31<8$;
2) $[0{,}51]=0$, оскільки $0<0{,}51<1$;
3) $[-5{,}31]=-6$, оскільки $-6<-5{,}31<-5$ (*рис. 43*).

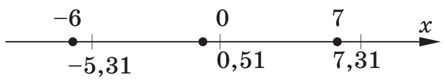


Рис. 43

Означення. Дробовою частиною числа a (позначення $\{a\}$) називається різниця між самим числом a і його цілою частиною: $\{a\}=a-[a]$.

Приклади:

1) $\{7{,}31\}=7{,}31-7=0{,}31$;
2) $\{0{,}51\}=0{,}51-0=0{,}51$;
3) $\{-5{,}31\}=-5{,}31-(-6)=0{,}69$;
4) $\{5\}=5-5=0$.

Із означення дробової частини числа випливає її властивість:

$$0\le\{a\}<1.$$

Завдання для самостійного розв'язування

2.42. Укажіть цілу й дробову частини числа:

а) 1,571; б) 10,25;
в) 0,051; г) 7;
д) −7; е) −8,35;
ж) −10,001; з) −0,05.

2.43. Знайдіть значення виразу та вкажіть його цілу й дробову частини:

а) $3\cdot1{,}7-2$; б) $-3\cdot2{,}3+2$;
в) $3{,}7\cdot2{,}1+3{,}5$; г) $(-2{,}4)\cdot(-5{,}5)+10$;
д) $(-1{,}7)\cdot(-3{,}4)-5{,}3$.

2. Функція $y=[x]$ та деякі її властивості

Ціла частина числа визначена для всіх чисел, оскільки будь-якому числу можна поставити у відповідність його цілу частину. Таким чином, $y=[x]$ — функція, областю визначення якої є всі числа: $D([x])=(-\infty;+\infty)$.

Розглянемо значення функції $y=[x]$ для конкретних значень аргументу.

За означенням цілої частини числа:

якщо $0\le x<1$, то $[x]=0$;

якщо $1\le x<2$, то $[x]=1$ і так далі.

Якщо $-1\le x<0$, то $[x]=-1$;

якщо $-2\le x<-1$, то $[x]=-2$ і так далі.

У загальному вигляді, маємо: якщо $m\le x<m+1$, то $[x]=m$, де m — ціле число. Отже, область значень функції $y=[x]$ є всі цілі числа.

Враховуючи ці відомості побудуємо графік функції $y=[x]$ (*рис. 44*).

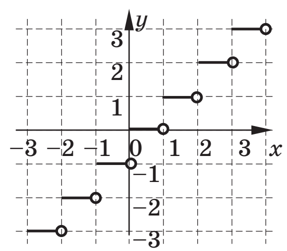


Рис. 44

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=2[x]$.

Розв'язання

Ордината кожної із точок графіка функції $y=2[x]$ вдвічі більша за відповідну ординату графіка функції $y=[x]$. Графік функції $y=2[x]$ зображений на *рисунку 45*.

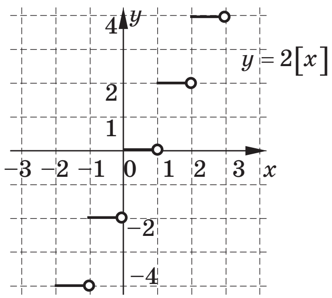


Рис. 45

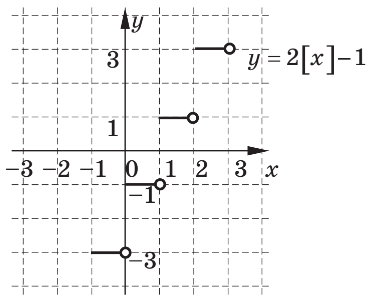


Рис. 46

б) $y=2[x]-1$.

Розв'язання

Ордината кожної точки графіка функції $y=2[x]-1$ на одиницю менша за відповідну ординату точки графіка функції $y=2[x]$. Графік функції $y=2[x]-1$ зображений на *рисунку 46*.

3. Функція $y=\{x\}$ та її властивості

Дробова частина числа визначена для всіх чисел, оскільки кожному числу можна поставити у відповідність його дробову частину. Таким чином, $y=\{x\}$ — функція, областю визначення якої є всі числа: $D(\{x\})=(-\infty;+\infty)$.

Як було зазначено раніше для дробової частини будь-якого числа, виконується нерівність: $0\le\{x\}<1$.

Отже, область значень цієї функції: $E(\{x\})=[0;1)$.

Розглянемо ще одну властивість функції $y=\{x\}$.

Нехай аргумент x набуває таких значень: 5,7; 4,7; 3,7; 2,7; 1,7; 0,7; −0,3; −1,3; −2,3; −3,3; −4,3.

Обчислимо дробову частину кожного з цих чисел.

$$\{5{,}7\}=5{,}7-[5{,}7]=5{,}7-5=0{,}7;$$
$$\{4{,}7\}=4{,}7-[4{,}7]=4{,}7-4=0{,}7;$$
$$\ldots$$
$$\{1{,}7\}=1{,}7-[1{,}7]=1{,}7-1=0{,}7;$$

$$\{0{,}7\}=0{,}7-[0{,}7]=0{,}7-0=0{,}7;$$
$$\{-0{,}3\}=-0{,}3-[-0{,}3]=-0{,}3-(-1)=0{,}7;$$
$$\{-1{,}3\}=-1{,}3-[-1{,}3]=-1{,}3-(-2)=0{,}7;$$
$$\ldots$$
$$\{-4{,}3\}=-4{,}3-[-4{,}3]=-4{,}3-(-5)=0{,}7.$$

Помітимо, що дробові частини всіх цих чисел рівні.

Можна зробити висновок, що числа, які відрізняються одне від одного на ціле число, мають рівні дробові частини. Тобто, якщо $x_2-x_1=m$, де m — ціле число, то

$$\{x_2\}=\{x_1\} \text{ або } \{x+m\}=\{x\}. \qquad (*)$$

Із розглянутого вище прикладу випливає, що найменше додатне число, для якого при всіх x виконується рівність (*), дорівнює 1.

Кажуть, що значення функції $y=\{x\}$ повторюються з періодом $T=1$.

Означення періодичної функції

Якщо для функції $y=f(x)$ існує таке додатне число T, що для всіх x із області визначення цієї функції виконується рівність $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$, то функція $y=f(x)$ називається періодичною, а число T називається її періодом.

Слід зауважити, що в природі існує багато періодичних процесів: зміна дня і ночі, зміна пір року, рух небесних тіл за орбітами тощо.

У математиці більшість періодичних процесів описується за допомогою тригонометричних функцій.

Повертаємось до функції $y=\{x\}$. Вона періодична з періодом $T=1$. Тому достатньо дослідити її поведінку тільки для x із проміжку $[0;1)$. Відомо, що при $x\in[0;1)$ ціла частина x дорівнює нулю, тому $\{x\}=x$.

Таким чином, ми дістали повне дослідження функції $y=\{x\}$.

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.
2) $E(y)=[0;1)$.
3) Функція періодична, $T=1$.
4) При $x\in[0;1)$ $y=x$.

Побудуємо графік функції $y=\{x\}$ (*рис. 47*).

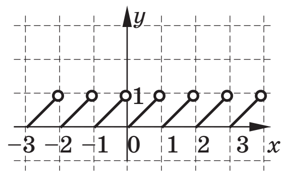


Рис. 47

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=2\{x\}$.

Розв'язання

Ординати всіх точок графіка функції $y=2\{x\}$ вдвічі більші за відповідні ординати графіка функції $y=\{x\}$. Графік функції $y=2\{x\}$ зображений на *рисунку 48*.

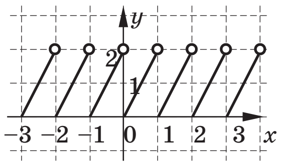


Рис. 48

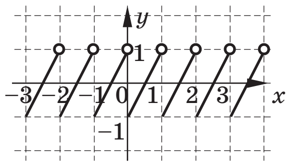


Рис. 49

б) $y=2\{x\}-1$.

Розв'язання

Ордината кожної точки графіка функції $y=2\{x\}-1$ на одиницю менша за відповідну ординату точки графіка $y=2\{x\}$.

Графік функції $y=2\{x\}-1$ зображений на *рисунку 49*.

Завдання для самостійного розв'язування

2.44. $x=\frac{1}{n}$, де n — натуральне число. Знайдіть $[x]$ і $\{x\}$.

2.45. $x=\frac{1}{m}$, де m — ціле число. Знайдіть $[x]$ і $\{x\}$.

2.46. Розв'яжіть рівняння:

а) $[x]=3$; б) $\{x\}=0{,}2$;

в) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=-0{,}2$; г) $\left[\frac{x}{2}\right]=2$;

д) $\left\{\frac{[x]}{2}\right\}=0$; е) $\left[\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]\right]=1$.

2.47. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}[x]+\{y\}=2{,}3,\\ [y]+\{x\}=1{,}1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}[x]+\{y\}=2{,}3,\\ [y]+\{x\}=1{,}1.\end{cases}$

2.48. Доведіть, що

а) $[x+m]=[x]+m$, де m — ціле число;

б) $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, де n — натуральне число.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
1. Знайдіть цілу й дробову частини числа:	
а) -7;	а) -11;
б) 99,9;	б) 101,99;
в) $-51{,}33$;	в) $-47{,}28$;
г) $-32\frac{1}{3}$	г) $-304\frac{1}{4}$
2. Побудуйте графік функції:	
а) $y=[x]-2$;	а) $y=[x]+1$;
б) $y=\{x\}+1$;	б) $y=\{x\}-2$;
в) $y=3\{x\}-1$;	в) $y=3\{x\}+1$;
г)* $y=\lvert[x]\rvert+1$	г)* $y=\lvert[x]\rvert-1$
3. Розв'яжіть рівняння:	
а) $[x]=-2$;	а) $[x]=13$;
б) $\{x\}=0{,}1$;	б) $\{x\}=0{,}3$;
в) $\left\{\frac{x}{3}\right\}=0$;	в) $\left\{\frac{x}{4}\right\}=0$;
г) $\left[\frac{x}{2}\right]=1$	г) $\left[\frac{x}{3}\right]=1$

§ 5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Графіки деяких функцій можна будувати, використовуючи графік функції $y=f(x)$. Розглянемо способи побудови графіків деяких функцій.

1. Побудова графіка функції виду $y=f(x)+A$

Ми вміємо будувати графік функції $y=|x|$ (на рисунках 50–57 його зображено пунктиром).

Розглянемо способи використання цього графіка для побудови графіків деяких інших функцій.

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=|x|+3$.

Розв'язання

Складемо таблицю значень функцій $y=|x|$ і $y=|x|+3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$y=\|x\|+3$	6	5	4	3	4	5	6

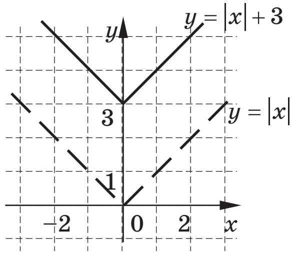


Рис. 50

Помічаємо, що ордината кожної точки графіка функції $y=|x|+3$ на 3 одиниці більша за відповідну ординату точки графіка функції $y=|x|$, тому графік функції $y=|x|+3$ можна здобути за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OY на 3 одиниці вгору (*рис. 50*).

б) $y=|x|-2$.

Розв'язання

Складемо таблицю значень функцій $y=|x|$ і $y=|x|-2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$y=\|x\|-2$	1	0	-1	-2	-1	0	1

Помічаємо, що ордината кожної точки графіка функції $y=|x|-2$ на 2 одиниці менша за відповідну ординату точки графіка функції $y=|x|$, тому графік функції $y=|x|-2$ можна здобути за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OY на 2 одиниці вниз (*рис. 51*).

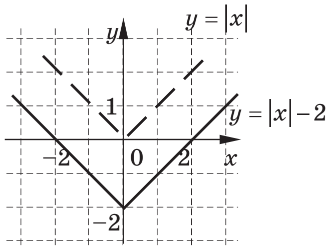
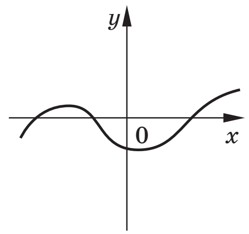
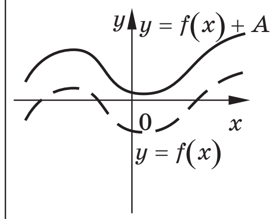
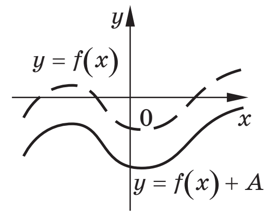


Рис. 51

Висновок, який можна зробити, розглянувши ці приклади, відображено в *таблиці 1*.

Таблиця 1

$y=f(x)$	$y=f(x)+A$, $A>0$	$y=f(x)+A$, $A<0$
		
	Паралельне перенесення вздовж осі OY вгору	Паралельне перенесення вздовж осі OY вниз

2. Побудова графіка функції виду $y=f(x+a)$

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=|x-2|$.

Розв'язання

Скористаємось результатом виконання завдання побудови графіка функції $y=|x-2|$. Зобразимо в одній системі координат графіки функцій $y=|x|$ та $y=|x-2|$ (*рис. 52*).

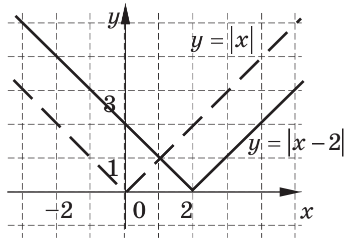


Рис. 52

Помічаємо, що графік функції $y=|x-2|$ можна здобути за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OX на 2 одиниці праворуч.

б) $y=|x+2|$.

Розв'язання

Скористаємось результатом виконання завдання побудови графіка функції $y=|x+2|$.

Зобразимо в одній системі координат графіки функцій $y=|x|$ та $y=|x+2|$ (*рис. 53*).

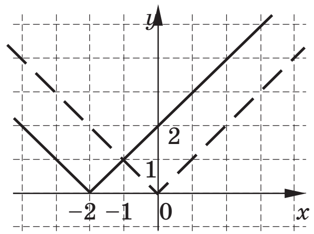
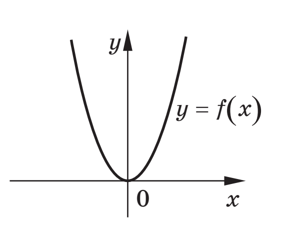
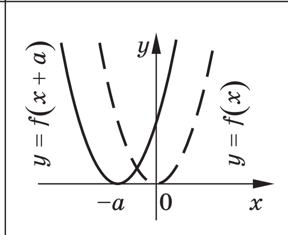
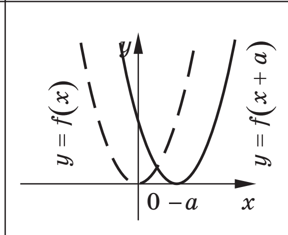


Рис. 53

Помічаємо, що графік функції $y=|x+2|$ можна здобути за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OX на 2 одиниці ліворуч.

Висновок, який можна зробити, розглянувши ці приклади, відображено в *таблиці 2*.

Таблиця 2

$y=f(x)$	$y=f(x+a)$	
	$a>0$	$a<0$
		
	Паралельне перенесення вздовж осі OX ліворуч	Паралельне перенесення вздовж осі OX праворуч

3. Побудова графіка функцій виду $y=kf(x)$ $(k>0)$

Приклади. Побудувати графік функції:

а) $y=2|x|$.

Розв'язання

Складемо таблицю значень функцій $y=|x|$ та $y=2|x|$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$y=2\|x\|$	6	4	2	0	2	4	6

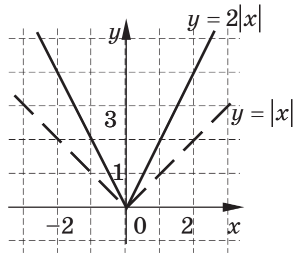


Рис. 54

Помічаємо, що ордината кожної точки графіка функції $y=2|x|$ удвічі більша за ординату відповідної точки графіка функції $y=|x|$, тому графік функції $y=2|x|$ можна здобути за допомогою розтягування графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OY удвічі (*рис. 54*).

б) $y=\frac{1}{2}|x|$.

Розв'язання

За аналогією із попереднім прикладом, ордината кожної точки графіка функції $y=\frac{1}{2}|x|$ удвічі менша за ординату відповідної точки графіка функції $y=|x|$, тому графік функції $y=\frac{1}{2}|x|$ можна здобути за допомогою стискання графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OY удвічі (*рис. 55*).

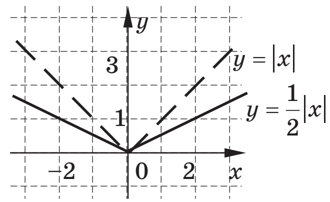
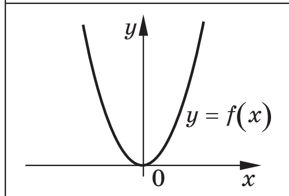
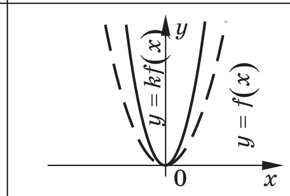
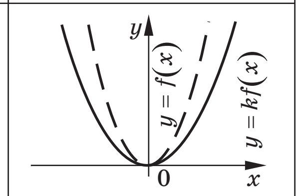


Рис. 55

Висновок, який можна зробити, розглянувши ці приклади, відображено в *таблиці 3*.

Таблиця 3

$y=f(x)$	$y=kf(x)$	
	$k>1$	$0<k<1$
		
	Розтягування вздовж осі OY в k разів	Стискання вздовж осі OY в $\frac{1}{k}$ разів

4. Побудова графіка функції виду $y=-f(x)$

Приклад. Побудувати графік функції $y=-|x|$.

Розв'язання

Легко помітити, що ордината кожної точки графіка функції $y=-|x|$ протилежна до відповідної ординати точки графіка функції $y=|x|$, тому графік функції $y=-|x|$ симетричний графіку функції $y=|x|$ відносно осі OX (*рис. 56*).

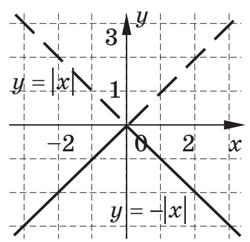
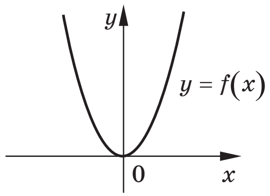
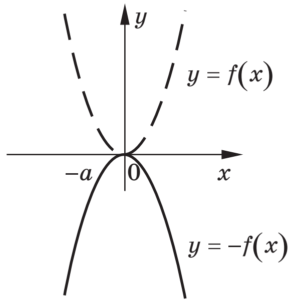


Рис. 56

Висновок, який можна зробити, розглянувши даний приклад, відображено в *таблиці 4*.

Таблиця 4

$y=f(x)$	$y=-f(x)$
	
	Симетрія відносно осі OX

5. Застосування декількох перетворень до графіка функції $y=f(x)$

Приклад. Побудувати графік функції $y=3-|x+2|$.

Розв'язання

Розглянемо допоміжні функції $y_0=|x|$, $y_1=|x+2|$, $y_2=-y_1$, $y_3=3+y_2$ та їхні графіки, що зображені на *рисунку 57*.

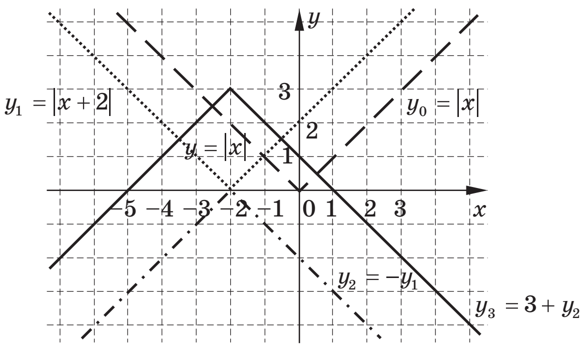


Рис. 57

1) Графік функції $y_1=|x+2|$ здобуто за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y=|x|$ вздовж осі OX на 2 одиниці ліворуч;

2) графік функції $y_2=-|x+2|$ здобуто за допомогою осьової симетрії відносно осі OX графіка функції $y_1=|x+2|$;
3) графік функції $y=3-|x+2|$ здобуто за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y_2=-|x+2|$ вздовж осі OY на 2 одиниці вгору.

Завдання для самостійного розв'язування

2.49. Побудуйте графіки функцій:

1) а) $y=x$; б) $y=x+3$; в) $y=x-3$.
2) а) $y=x$; б) $y=3x$; в) $y=\frac{1}{3}x$.
3) а) $y=2x-3$; б) $y=-2x-3$; в) $y=\frac{1}{2}x+2$; г) $y=-\frac{1}{2}x-2$.
4) а) $y=|x|$; б) $y=3|x|$; в) $y=3|x-1|$.
5) а) $y=|x|-3$; б) $y=|x|+5$; в) $y=3|x|-4$; г) $y=1{,}5|x|+2{,}5$; д) $y=\frac{1}{4}|x|-6$.
6) а) $y=[x+2]$; б) $y=[x-2]$; в) $y=\{x+0{,}5\}$; г) $y=\{x-0{,}4\}$.
7) а) $y=-[x]$; б) $y=-\{x\}$; в) $y=1{,}5[x]$; г) $y=3\{x\}$.
8) а) $y=0{,}5[x]+1$; б) $y=3[x]-2$; в) $y=2{,}5\{x\}-1$; г) $y=-2\{x\}+3$.
9) а) $y=|2[x]-1|$; б) $y=|2\{x\}-1|$; в) $y=|-0{,}5[x]+1|$; г) $y=|3\{x\}-4|$.

2.50. Побудуйте множину точок на координатній площині:

а) $y=[\{x\}]$; б) $y=\{[x]\}$; в) $y=[x+1]-\{x\}$; г) $[y]=[x]$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
1. Побудуйте графік функції:	
а) $y=\lvert x+1\rvert-5$; б) $y=5-2\lvert x\rvert$; в) $y=3[x]-2$; г) $y=\lvert 3\{x\}-2\rvert$	а) $y=\lvert x-1\rvert+5$; б) $y=3-2\lvert x\rvert$; в) $y=3\{x\}-2$; г) $y=\lvert 3[x]-2\rvert$
2. Розв'яжіть рівняння:	
а) $[x+1]=2$; б) $\{x-0{,}5\}=1$	а) $[x-1]=3$; б) $\{x+0{,}5\}=2$

Контрольна робота з теми «Функції $y=[x]$ та $y=\{x\}$»

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції:

а) $y=2-\lvert x-1\rvert$; б) $y=2\{x\}-2$;

в) $y=-\dfrac{1}{2}[x]$; г) $y=[x+1]-1$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $3[x+1]=2[x]$; б) $3\{x+1\}=2\{x\}$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння $\lvert x\rvert=[x]$.

4.* Укажіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

а) $[x+3]=a$; б) $\{x\}=a-1$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції:

а) $y=3-\lvert x+2\rvert$; б) $y=3\{x\}+3$;

в) $y=-2[x]$; г) $y=[x-2]+2$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $2[x-2]=3[x]$; б) $2\{x-2\}=3\{x\}$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння $\{x\}=\lvert x-1\rvert$.

4.* Укажіть усі значення параметра a, при яких рівняння має корені:

а) $[x-2]=a-0{,}1$; б) $\{x-0{,}2\}=a$.

Розділ III. СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 1. СТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

1. Загальні відомості

Два лінійних рівняння з двома змінними, для яких треба знайти розв'язки, що задовольняють одночасно обидва рівняння, називаються системою двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — задані числа, x і y — змінні. Наприклад, у системі рівнянь $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ -x+5y=1. \end{cases}$

$$a_{11}=2,\ a_{12}=-3,\ b_1=5,$$

$$a_{21}=-1,\ a_{22}=5,\ b_2=1.$$

Розв'язком системи двох рівнянь з двома змінними називається впорядкована пара чисел, яка під час підстановки в систему перетворює кожне рівняння в правильну числову рівність.

Наприклад, пара чисел $(4;1)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ -x+5y=1. \end{cases}$$

Дійсно,

$$2x-3y=2\cdot4-3\cdot1=8-3=5,\quad -x+5y=-4+5\cdot1=1.$$

Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує.

Системи рівнянь, які не мають розв'язків, називаються несумісними.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+4y=7 \end{cases}$$

є несумісною (чому?).

Системи рівнянь називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки. Перехід від рівняння до рівносильного йому рівняння позначається знаком рівносильності «$\Leftrightarrow$».

Наприклад, системи рівнянь

$$\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=7 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x=y+5, \\ 2x+2y=14 \end{cases}$$

рівносильні, оскільки мають один і той самий розв'язок: $(6;1)$.

Несумісні системи рівнянь є рівносильними.

2. Спосіб підстановки

Алгоритм розв'язання системи рівнянь способом підстановки:
1) виразити з одного з рівнянь системи одну змінну через другу;
2) здобутий вираз підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної;
3) розв'язати здобуте рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення другої змінної.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4 \end{cases}$ способом підстановки.

Розв'язання

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y, \\ 2(5-2y)+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y, \\ -3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y, \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Відповідь. $(1;2)$.

3. Спосіб додавання

Алгоритм розв'язання системи рівнянь $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases}$ способом додавання:
1) помножити кожне з рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при змінній y сталі протилежними числами;
2) виконати почленне додавання здобутих рівнянь;
3) знайти значення змінної x;
4) помножити кожне з рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при змінній x стали протилежними числами;
5) виконати почленне додавання утворених рівнянь;
6) знайти значення змінної y.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 4x-3y=14, \\ x+2y=-2. \end{cases}$

Розв'язання

Числа, на які треба помножити рівняння, будемо записувати поруч з рівняннями, відокремлюючи їх вертикальними рисками.

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ x+2y=-2 \end{cases}\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}\Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=22, \\ -11y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$$

Відповідь. $(2;-2)$.

б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)+2(x-y)=36, \\ 3(x+y)-4(x-y)=72 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y=36, \\ -x+7y=72 \end{cases}\left|\begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}\Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} 36x=36\cdot 5, \\ 36y=36\cdot 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=11. \end{cases}$$

Відповідь. $(5;11)$.

Примітка. Цю систему можна розв'язати за допомогою заміни. Нехай $\frac{x+y}{4}=a$, $\frac{x-y}{3}=b$, тоді система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases}2a+b=6,\\ a-b=6.\end{cases}$$

Здобуту систему рівнянь можна розв'язати методом додавання.

в) $\begin{cases}5|x|-3|y|=7,\\ -2|x|+5|y|=1.\end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases}5|x|-3|y|=7,\\ -2|x|+5|y|=1\end{cases}\left|\begin{matrix}5&2\\3&5\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}19|x|=38,\\ 19|y|=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|=2,\\ |y|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2 \text{ або } x=-2,\\ y=1 \text{ або } y=-1.\end{cases}$$

Для того, щоб дістати всі розв'язки цієї системи рівнянь, необхідно враховувати, що кожному з двох значень однієї змінної, відповідають обидва значення другої змінної.

Відповідь. $(2;1)$, $(2;-1)$, $(-2;1)$, $(-2;-1)$.

Завдання для самостійного розв'язування

3.1. Чи сумісна система рівнянь:

а) $\begin{cases}x+y=2,\\ x+y=-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y=4,\\ 3x-4{,}5y=5?\end{cases}$

3.2. За допомогою підбору знайдіть два розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=-10,\\ xy=21.\end{cases}$

3.3. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases}-3x+y=5,\\ 5x+2y=23;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3,\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{8}{3};\end{cases}$

в) $\begin{cases}3(y-2x)-(5x+2)=5(1-x),\\ 7-6(x+y)=2(3-2x)+y;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2,\\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=20.\end{cases}$

3.4. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases}x-3y-4=0,\\ 5x+2y-37=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}=2,\\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}-\frac{2y}{3}=\frac{5}{2},\\ \frac{3x}{2}+2y=6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5(3x+y)-8(x-6y)=20,\\ 6(x-10y)-13(x-y)=52.\end{cases}$

3.5. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2|x|+|y|=4,\\ 6|x|-2|y|=10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}=7,\\ \frac{|x|}{3}+\frac{|y|}{2}=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{|x|+|y|}{9}-\frac{|x|-|y|}{3}=2,\\ \frac{2|x|-|y|}{6}-\frac{3|x|+2|y|}{3}=-20;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{11|x|+3|y|}{9}-3|x|=-5,\\ \frac{14|x|-9|y|}{11}+5|y|=8.\end{cases}$

3.6. Розв'яжіть задачу. Сестра старша від брата на 6 років, а через рік вона буде старшою від брата в два рази. Скільки років кожному з них?

4. Графічний спосіб

Алгоритм розв'язування двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом:

1) побудувати на одній координатній площині графіки кожного з рівнянь системи;
2) знайти координати точки перетину побудованих прямих (якщо вони перетинаються).

Перевагою графічного способу розв'язування систем рівнянь є його наочність. Але, як правило, за допомогою графічного способу здобувають наближені розв'язки. Для знаходження точного значення змінних варто користуватися одним із аналітичних способів розв'язування систем рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь графічним способом:

а) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1, \\ y=-2x+4. \end{cases}$$

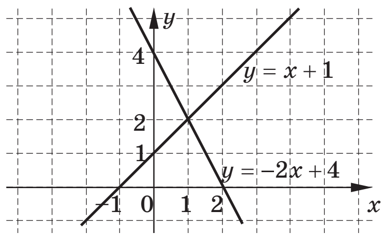


Рис. 1

Побудуємо графіки кожної з прямих на одній координатній площині і знайдемо координати точки їх перетину (*рис. 1*).

Графіки перетинаються в точці з координатами $(1;2)$.

Відповідь. $(1;2)$.

б) $\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x+4y=8. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-0{,}5x+3, \\ y=-0{,}5x+2. \end{cases}$$

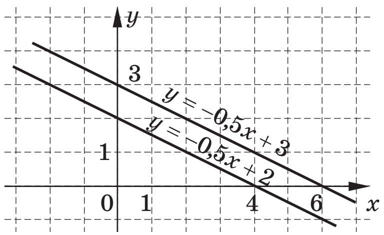


Рис. 2

Побудуємо графіки кожної з прямих на одній координатній площині і знайдемо координати точки їх перетину (якщо ці прямі перетинаються) (*рис. 2*).

Графіки рівнянь даної системи паралельні, тобто вони не мають точки перетину. Це означає, що система рівнянь несумісна.

Відповідь. Система несумісна.

в) $\begin{cases} x-2y=2, \\ 3x-6y=6. \end{cases}$

Розв'язання

Побудуємо графіки кожної з прямих на одній координатній площині (*рис. 3*).

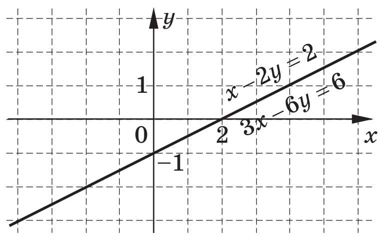


Рис. 3

Графіки рівнянь даної системи співпадають. Це означає, що системи має безліч розв'язків.

Координати будь-якої точки прямої $x-2y=2$ є розв'язками даної системи рівнянь.

Нехай $y=t$, t — довільне число, тоді $x=2t+2$.

Відповідь. $(2t+2;t)$, де t — довільне число.

Завдання для самостійного розв'язування

3.7. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом:

а) $\begin{cases} x+2y=4, \\ x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ x+\dfrac{y}{3}=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+2y=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x}{2}+6y=1. \end{cases}$

§ 2. МЕТОД КРАМЕРА*. ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

1. Метод Крамера

Запишемо в загальному вигляді розв'язання системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання.

$$\left.\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}\right| \begin{matrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{matrix} \left| \begin{matrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot x=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (-a_{12}a_{21}+a_{22}a_{11})\cdot y=-b_1a_{21}+b_2a_{11} \end{cases} \quad (1)$$

Бачимо, що коефіцієнти при змінних x і y рівні:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-a_{12}a_{21}+a_{22}a_{11}.$$

Число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ називається головним визначником системи рівнянь. Його позначають так:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Число $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ називається першим допоміжним визначником системи рівнянь. Він позначається так:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

* Крамер Габрієль (1704–1752) — швейцарський математик.

Число $a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ називається другим допоміжним визначником системи рівнянь. Він позначається так:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

У нових позначеннях система (1) лінійних рівнянь з двома змінними набуває вигляду:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y. \end{cases}$$

Метод Крамера полягає в наступному:

- якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$;
- якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, то x і y — будь-які числа, що задовольняють одне з рівнянь системи;
- якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, то рівняння $\Delta \cdot x = \Delta_x$ не має розв'язків, система рівнянь несумісна;
- якщо $\Delta = 0$, $\Delta_y \neq 0$, то рівняння $\Delta \cdot y = \Delta_y$ не має розв'язків, система рівнянь несумісна.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

а) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо головний визначник системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3.$$

Знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 4 - 10 = -6.$$

Оскільки головний визначник не дорівнює нулю, то система рівнянь має єдиний розв'язок: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-3}{-3} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$.

Відповідь. $(1; 2)$.

б) $\begin{cases} 2x - 2y = 4, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = -2 + 2 = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 = -4 + 6 = 2.$$

Оскільки $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, то рівняння $\Delta \cdot x = \Delta_x$ не має розв'язків, система рівнянь несумісна.

Відповідь. Система рівнянь несумісна.

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 3x - 4{,}5y = 9. \end{cases}$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4{,}5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4{,}5) - (-3) \cdot 3 = -9 + 9 = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -4{,}5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4{,}5) - (-3) \cdot 9 = -27 + 27 = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 18 - 18 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, система рівнянь має безліч розв'язків.

Нехай $y = t$, t — будь-яке число, тоді $2x - 3t = 6$, звідки $x = \dfrac{3}{2}t + 3$.

Отже, всі розв'язки системи рівнянь можна записати у вигляді $\left(\dfrac{3}{2}t + 3; t\right)$, де t — довільне число.

Відповідь. $\left(\dfrac{3}{2}t + 3; t\right)$, де t — довільне число.

Алгоритм розв'язування систем рівнянь методом Крамера можна проілюструвати за допомогою блок-схеми (*рис. 4*).

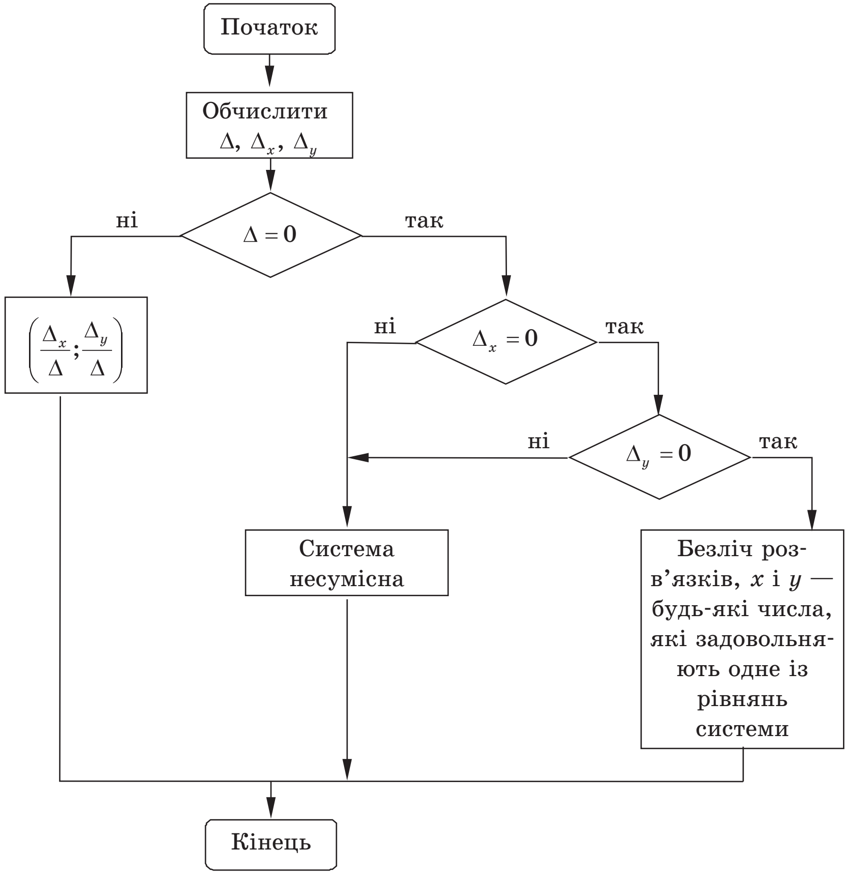


Рис. 4

Завдання для самостійного розв'язування

3.8. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера

а) $\begin{cases} 5x+y=4, \\ x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{5y}{4}=-3, \\ \dfrac{5x}{6}+\dfrac{7y}{8}=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2-5(0{,}2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y); \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3(y-2x)-(5y+2)=5(1-x), \\ 7-6(x+y)=2(3-2x)+y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1). \end{cases}$

3.9. Доведіть, що система рівнянь несумісна:

а) $\begin{cases} 3x-y=0, \\ 6x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x=1-2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 10x+5y=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+8y=-1, \\ x+2\dfrac{2}{3}y=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4, \\ 5(x+y)-7(x-y)=2+2y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{2}=x+0{,}15, \\ \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{x-2y}{3}=-y-7. \end{cases}$

3.10. Покажіть, що система рівнянь має безліч розв'язків та запишіть вираз для знаходження цих розв'язків:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x=2-2(y+1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=5-y, \\ y=5-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ y=\dfrac{13-2x}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4, \\ 5(x+y)-7(x-y)=8+2y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{2}=x+3{,}6, \\ \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{x-2y}{3}=-y-7. \end{cases}$

Робота для самоперевірки

Варіант 1	**Варіант 2**
1. Розв'яжіть кожну із систем рівнянь трьома способами (способом підстановки, способом додавання, методом Крамера):	
а) $\begin{cases} 4x+3y=-4, \\ 6x+5y=-7; \end{cases}$	а) $\begin{cases} 5x+6y=0, \\ 3x+4y=4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=2, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=8 \end{cases}$

Варіант 1	Варіант 2
2. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом:	
$\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=2, \\ x+2y=-6 \end{cases}$
3. Доведіть, що система рівнянь несумісна:	
$\begin{cases} x+2y=6, \\ 2(x-y)=-4y \end{cases}$	$\begin{cases} y-3=3(x-1), \\ 6x-2y=3 \end{cases}$
Додаткове завдання. Розв'яжіть задачу. Батько старший від доньки на 26 років, через 4 роки він буде старший від доньки в 3 рази. Скільки років батькові і доньці?	

2. Розв'язування систем рівнянь з параметрами

Для дослідження розв'язків систем рівнянь з параметрами зручно користуватися методом Крамера (див. блок-схему на рисунку 4).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь залежно від параметра a:

а) $\begin{cases} ax+6y=1, \\ x+3y=2. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо головний визначник системи рівнянь:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=a\cdot 3-6\cdot 1=3(a-2).$$

Якщо $a=2$, то $\Delta=0$, якщо $a\neq 2$, то $\Delta\neq 0$.

Знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-6\cdot 2=3-12=-9.$$

$\Delta_x\neq 0$ при будь-яких значеннях a, тому при $a=2$ система несумісна.

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2a-1.$$

Отже, при $a\neq 2$ система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-9}{3(a-2)}=-\frac{3}{a-2},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2a-1}{a-2}.$$

Відповідь. При $a=2$ система рівнянь несумісна; при $a\neq 2$ $\left(-\frac{3}{a-2};\frac{2a-1}{a-2}\right)$.

б) $\begin{cases} 6x-ay=a+4, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо головний визначник системи рівнянь:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 1-(-a)\cdot 3=3(a+2).$$

Якщо $a=-2$, то $\Delta=0$, якщо $a\neq -2$, то $\Delta\neq 0$.

Знайдемо допоміжні визначники.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a+4 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(a+4)\cdot 1-(-a)\cdot 1=a+4+a=2(a+2).$$

Якщо $a=-2$, то $\Delta_x=0$, якщо $a\neq -2$, то $\Delta_x\neq 0$.

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 6 & a+4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 1-(a+4)\cdot 3=6-3a-12=-3(a+2).$$

Якщо $a=-2$, то Δ_y, якщо $a\neq -2$, то $\Delta_y\neq 0$.

Таким чином, якщо $a\neq -2$, то

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{2(a+2)}{3(a+2)}=\frac{2}{3};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-3(a+2)}{3(a+2)}=-1.$$

Якщо $a=-2$, то $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$. Це означає, що система рівнянь має безліч розв'язків $(x;y)$, де x і y — корені одного з рівнянь системи. Нехай $y=t$, t — будь-яке число, тоді з другого рівняння системи дістанемо:

$$3x+t=1,\ 3x=1-t,\ x=\frac{1-t}{3}.$$

Тобто пара чисел $\left(\frac{1-t}{3};t\right)$, де t — довільне число, є розв'язком даної системи рівнянь.

Відповідь. При $a\neq -2$ $\left(\frac{2}{3};-1\right)$;

при $a=-2$ $\left(\frac{1-t}{3};t\right)$, де t — довільне число.

в) $\begin{cases} ax-y=a, \\ x+ay=1. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо головний визначник системи рівнянь:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a\cdot a-(-1)\cdot 1=a^2+1.$$

$\Delta\neq 0$ при всіх дійсних значеннях a, тому система рівнянь має єдиний розв'язок.

Знайдемо його.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2+1,\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{a^2+1}{a^2+1}=1.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot 1-a\cdot 1=0,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{a^2+1}=0.$$

Відповідь. При всіх значеннях a $(1;0)$.

г) $\begin{cases} ax+y=a, \\ x+ay=1. \end{cases}$

Розв'язання

Головний визначник системи рівнянь дорівнює:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1.$$

Якщо $a=\pm 1$, то $\Delta=0$, якщо $a\neq\pm 1$, то $\Delta\neq 0$.

Знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-a=0.$$

Якщо $a=1$, то $\Delta=0$ і $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, отже, система має безліч розв'язків. Нехай $y=t$, тоді із другого рівняння системи, маємо $x=1-t$. Таким чином, пара чисел $(1-t;t)$, де t — будь-яке число є розв'язком системи при $a=1$.

Якщо $a=-1$, то $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$.

Отже, система має безліч розв'язків $(1+t;t)$.

Якщо $a\neq\pm 1$, то $\Delta\neq 0$, $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y=0$.

Отже, $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=0$.

$(1;0)$ — розв'язок системи при $a\neq\pm 1$.

Відповідь. При $a=1$ $(1-t;t)$, t — будь-яке число; при $a=-1$ $(1+t;t)$, t — будь-яке число, при $a\neq\pm 1$ $(1;0)$.

д) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x+ay=2a+1. \end{cases}$

Розв'язання

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1.$$

Якщо $a=\pm 1$, то $\Delta=0$, якщо $a\neq\pm 1$, то $\Delta\neq 0$.

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2a+1 & a \end{vmatrix}=a-(2a+1)=-a-1;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2a+1 \end{vmatrix}=2a^2+a-1=a^2+a+a^2-1=$$

$$=a(a+1)+(a-1)(a+1)=(a+1)(2a-1).$$

Якщо $a=1$, то $\Delta=0$, $\Delta_x=-2$, $\Delta_y=2$, отже, система розв'язків не має.

Якщо $a=-1$, то $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, отже, система має безліч розв'язків $(t-1;t)$, де t — будь-яке число.

Якщо $a\neq\pm 1$, то $\Delta\neq 0$, $\Delta_x\neq 0$, тоді

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1}{1-a},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2a-1}{a-1}.$$

Відповідь. При $|a|\neq 1$ $\left(\frac{1}{a-1};\frac{2a-1}{a-1}\right)$;

при $a=1$ розв'язків немає;

при $a=-1$ $(t-1;t)$, де t — будь-яке число.

Завдання для самостійного розв'язування

3.10. Розв'яжіть систему рівнянь залежно від параметра a:

а) $\begin{cases} 2x+ay=3, \\ 3x-ay=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2}-ay=\frac{3}{2}, \\ \frac{x}{3}+y=1. \end{cases}$

3.11. При яких значеннях параметра m система рівнянь має єдиний розв'язок:

а) $\begin{cases} mx+6y=1, \\ x+3y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2my=3, \\ x+3y=3? \end{cases}$

3.12. При яких значеннях параметра c система рівнянь несумісна:

а) $\begin{cases} cx+6y=2, \\ x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x-cy=8? \end{cases}$

3.13. При яких значеннях параметра a система рівнянь має нескінченну множину розв'язків? Запишіть вираз для знаходження цих розв'язків.

а) $\begin{cases} x-2y=a, \\ 3x-3ay=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-ay=3, \\ 2x+2y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax+y=2, \\ 9a+ay=6. \end{cases}$

3.14. Розв'яжіть систему рівнянь залежно від параметра m:

а) $\begin{cases} m^2x+y=1, \\ 8x+2y=m; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+(m+1)y=1, \\ mx+2y=m; \end{cases}$

в) $\begin{cases} mx+y=1, \\ x+my=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} mx+y=1, \\ x+my=1. \end{cases}$

Робота для самоперевірки

Варіант 1	Варіант 2
Розв'яжіть систему рівнянь залежно від параметра a:	
а) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 6x-ay=1; \end{cases}$	а) $\begin{cases} x+ay=4, \\ 2x-3y=3; \end{cases}$
б) $\begin{cases} a(x-1)+2y=1, \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+2a(y-1)=2, \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Розділ IV. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

§ 1. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОДІЛЬНОСТІ

1. Цілі числа та дії над ними

Множина цілих чисел (Z) складається із натуральних чисел 1, 2, 3, ..., числа 0 та чисел, протилежних натуральним: –1, –2, –3,...

У цілій множині завжди можна виконати дії додавання та віднімання, тобто: якщо m і n — цілі числа, то сума $m+n$ (різниця $m-n$) також є цілим числом.

Означення. Різницею двох цілих чисел m і n називається таке число x, що $x+n=m$.

Теорема. Для будь-яких двох цілих чисел m і n існує, і до того тільки одне, число x, яке задовольняє умову: $x+n=m$.

Доведення. Розглянемо рівняння $x+n=m$. Додамо до обох його частин число $(-n)$, дістанемо: $x+n+(-n)=m-n$; $x+(n+(-n))=m-n$; $x=m-n$. Тобто різниця двох цілих чисел існує і є цілим числом.

Доведемо, що число x, яке задовольняє рівняння $x+n=m$, єдине. Нехай існує число $x_1 \neq x$, таке що $x_1+n=m$. Тоді, як було доведено, $x_1=m-n$ і $x_1=x$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

У множині цілих чисел завжди можна виконати також і множення. Якщо m і n — цілі числа, то добуток $m \cdot n$ також є цілим числом.

Проте ділення — дію, обернену до множення, не завжди можна виконати у множині цілих чисел.

Означення. Часткою від ділення цілого числа m на ціле число n ($n \neq 0$) називається таке число x, що $x \cdot n=m$.

Число x не обов'язково ціле. Наприклад, частки 5:2; 2:5; (-30):7; 30:(-7) не є цілими числами.

Зустрічаються, звичайно, й такі випадки, коли частка двох цілих чисел є цілим числом. Наприклад, $14:(-2)=-7$; $35:7=5$; $(-7):7=-1$.

Означення. Якщо a і m — цілі числа, причому $m \neq 0$, такі що частка $a:m$ є цілим числом, то кажуть, що a ділиться на m або є кратним m.

Запис $a \vdots m$ означає: a ділиться на m (або a кратне m).

Можна сформулювати означення, рівносильне попередньому.

Означення. Ціле число a ділиться на ціле число m ($m \neq 0$), якщо існує таке ціле число n, що $a = m \cdot n$.

Зазначимо, що частка $a:m$ існує тільки у випадку $m \neq 0$.

Якщо $a=0$, частка визначена і дорівнює нулю. Тобто число 0 — універсальне кратне.

2. Теореми про подільність

Зауваження. Надалі, якщо спеціально це не обговорюється, ми будемо розглядати тільки цілі числа.

Теорема 1. Якщо числа a і b діляться на m, то сума $a+b$ і різниця $a-b$ також діляться на m.

Доведення. Якщо число a ділиться на m, то це означає, що існує таке ціле число n, що $a = m \cdot n$. Якщо число b ділиться на m, то існує таке ціле число l, що $b = m \cdot l$.

Тоді $a+b = mn + ml = m(n+l)$, де $n+l$ — ціле число. Це означає, що $(a+b) \vdots m$. Аналогічно доводиться, що $(a-b) \vdots m$.

Примітка. Можна довести, що сума трьох (або взагалі будь-якої скінченної кількості) доданків, кожний з яких ділиться на m, також ділиться на m.

Наслідок. Якщо сума декількох доданків ділиться на m і відомо, що всі, крім одного, доданки діляться на m, то і доданок, який залишився, також ділиться на m.

Доведення. Доведемо це твердження для трьох доданків. Нехай $a+b+c=s$ і a, b, s — діляться на m, тобто $s=mn$, $a=ml$, $b=mp$, де n, l, p — деякі цілі числа. Тоді $c = s-a-b = mn-ml-mp = m(n-l-p)$, де $n-l-p$ є цілим числом. Це означає, що c ділиться на m, що і треба будо довести.

Теорема 2. Якщо хоча б один із множників ділиться на m, то й добуток ділиться на m.

Доведення. Нехай a ділиться на m, а c — будь-яке ціле число. Тоді $a=mn$, де n — ціле число і $ac = m(cn)$, де cn — ціле число. Це означає, що $ac \vdots m$, що і треба було довести.

Теорема 3. Якщо a ділиться на m, а m ділиться на n, то a ділиться на n (властивість транзитивності).

Доведення. Нехай $a=mp$, $m=nk$, де a, m, p, k — цілі числа. Тоді $a = mp = nkp = n(kp)$, де kp — ціле число. Тобто $a \vdots n$, що і треба було довести.

Теорема 4. Якщо a ділиться на m, а b ділиться на n, то ab ділиться на mn.

Доведення. Нехай $a=mp$, $b=nl$, де a, b, p, l — цілі числа. Тоді $ab = mpnl = mn(pl)$, де pl — ціле число. Це означає, що $(ab) \vdots (mn)$, що і треба було довести.

Наслідок. Якщо a ділиться на m, а n будь-яке натуральне число, то a^n ділиться на m^n.

Приклад 1. Довести, що добуток двох послідовних натуральних чисел, ділиться на 2.

Доведення. Нехай n і $n+1$ — два послідовних натуральних числа. Тоді одне з них обов'язково парне, тому добуток $n(n+1)$ ділиться на 2, що і треба було довести.

Приклад 2. Відомо, що $ab+cd$ ділиться на $a+c$. Довести, що $ad+bc$ ділиться на $a+c$.

Доведення. Оскільки $ab+cd$ ділиться на $a+c$, то $ab+cd = k(a+c)$.

Виконаємо перетворення виразу $ad+bc$:

$$ad+bc = (a+c)(b+d)-(ab+cd) =$$
$$=(a+c)(b+d)-k(a+c) = (a+c)(b+d-k),$$

де $b+d-k$ — ціле число. Це означає, що $(ad+bc) \vdots (a+c)$, що і треба було довести.

Приклад 3. Довести, що $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ не ділиться на 10.

Доведення. Позначимо вираз $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ через s. Подамо вираз у вигляді:

$$s = (1^3+9^3)+(2^3+8^3)+(3^3+7^3)+(4^3+6^3)+5^3 = 10n+125.$$

Звідси випливає, що s не ділиться на 10, що і треба було довести.

Приклад 4. В класі навчається 31 учень. Чи може кожен із них дружити рівно з дев'ятьма однокласниками?

Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Тоді кількість пар учнів, які дружать один з одним, дорівнює $\frac{31\cdot 9}{2}$ і має бути цілим числом. Але це не так. Отже, припущення неправильне.

Відповідь. Ні, не може.

Приклад 5. Довести, що трицифрове число, яке записане однаковими цифрами, ділиться на 37.

Доведення. Розглянемо трицифрове число, яке записане однаковими цифрами: $\overline{aaa}=100a+10a+a=111a=3\cdot 37a$, яке ділиться на 37, що і треба було довести.

Приклад 6. Нехай число $a+\frac{1}{a}$ — ціле. Довести, що $a^2+\frac{1}{a^2}$ також ціле число.

Доведення. Розглянемо

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=a^2+2+\frac{1}{a^2}.$$

Тому $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ — ціле число, що і треба було довести.

Приклад 7. Довести, що різниця будь-якого трицифрового числа і трицифрового числа, записаного тими ж цифрами, але в зворотному порядку, ділиться на 9.

Доведення. Розглянемо

$$\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=9(11a-11c)$$

ділиться на 9, що і треба було довести.

Примітка. Здобута різниця ділиться і на 11, і на 99.

Завдання для самостійного розв'язування

4.1. Чи ділиться число a на $-a$? Чи ділиться число $-a$ на a?

4.2. В якому випадку два цілих числа a і b мають таку властивість, що a ділиться на b і b ділиться на a?

4.3. Числа a і b такі, що $0<a<b$. Чи може a ділитися на b?

4.4. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

4.5. Доведіть, що якщо $ab+cd$ ділиться на $a-c$ $(a\neq c)$, то $ad+bc$ також ділиться на $a-c$.

4.6. Доведіть, що число $mn(m+n)$ — парне.

4.7. Відомо, що a кратне 3, b кратне 2. Доведіть, що $2a+3b$ кратне 6.

4.8. Дріб $\frac{a}{b}$ скоротний. Чи скоротний дріб $\frac{a-b}{a+b}$?

4.9. Доведіть, що $1^3+2^3+3^3+\ldots+99^3$ ділиться на 100.

4.10. Доведіть, що будь-яке натуральне число, десятковий запис якого складається із $3n$ $(n\in N)$ однакових цифр, ділиться на 37.

4.11. Доведіть, що:

а) $\overline{ab}-\overline{ba}$ кратне 9; б) $\overline{abc}-\overline{cba}$ кратне 99;

в) $\overline{ab}+\overline{ba}$ ділиться на 11; г) $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ ділиться на 11.

4.12. Доведіть, що якщо $a+\frac{1}{a}$ —ціле число, то $a^3+\frac{1}{a^3}$ також ціле число.

4.13. Доведіть, що якщо в трицифровому числі дві останні цифри однакові, а сума його цифр ділиться на 7, то і саме число ділиться на 7.

4.14. Яких чисел більше серед першої тисячі натуральних чисел: тих, які діляться на 3 або на 5, чи тих які не діляться ні на 3, ні на 5?

4.15. Чи існує таке натуральне число n, щоб сума $1+2+3+\ldots+n$ дорівнювала трицифровому числу, яке складалося б з однакових цифр?

4.16. Доведіть, що:

а) $\left(a^2-b^2\right)\vdots(a-b)$, $(a\neq b)$; б) $\left(a^2-b^2\right)\vdots(a+b)$, $(a+b\neq 0)$;

в) $\left(a^3-b^3\right)\vdots(a-b)$, $(a\neq b)$; г) $\left(a^3+b^3\right)\vdots(a+b)$, $(a+b\neq 0)$.

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Відомо, що a кратне 3, b кратне 8. Доведіть, що ab кратне 24.
2. Число a кратне 6. Доведіть, що a^2-12a кратне 36.
3. Доведіть, що n^2+3n ділиться на 2 при будь-якому натуральному n.
4. Доведіть, що n^3+5n ділиться на 3 при будь-якому натуральному n.
5. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.
6. Доведіть, що 2008^4-42^4 ділиться на 2050.

Варіант 2

1. Відомо, що a ділиться на 5, b ділиться на 6. Доведіть, що ab ділиться на 30.
2. Число b кратне 7. Доведіть, що b^2+14b ділиться на 49.
3. Доведіть, що n^2+4n ділиться на 2 при будь-якому натуральному n.
4. Доведіть, що n^3+8n ділиться на 3 при будь-якому натуральному n.

5. Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5.
6. Доведіть, що $2007^4 - 23^4$ ділиться на 2030.

3. Ділення з остачею

Нам уже відомо, що не завжди частка двох цілих чисел є цілим числом. Наприклад, при діленні 49 на 3 дістанемо частку 16 і остачу 1, тобто $49 = 3 \cdot 16 + 1$.

> ***Означення.*** Нехай a і m — цілі числа, $m > 0$. Якщо a можна записати у вигляді $a = mq + r$, де $0 \le r < m$, то говорять, що при діленні числа a на число m здобуто частку q і остачу r.

У зв'язку з цим означенням виникають два запитання:
1) чи завжди існують такі числа q і r, що виконується рівність $a = mq + r$?
2) Скільки існує способів подання числа a при діленні його на число m?

Відповіді на ці запитання дає теорема існування та єдиності.

Теорема. Нехай a — ціле число, m — натуральне. Тоді існують числа q і r, такі що $0 \le r < m$ і $a = mq + r$. Числа q і r визначаються цими умовами однозначно.

Доведення. Виберемо таке натуральне число c, що $|a| < c$ і розглянемо числа:

$$-cm,\ (-c+1)m,\ (-c+2)m, \ldots,\ -2m,\ -m,\ 0,\ m,\ 2m,\ \ldots,\ cm.$$

Кожне число, починаючи з другого рівно на m більше від попереднього, тобто послідовність зростає. При цьому перше число менше ніж a, а останнє — більше ніж a, оскільки $|a| < c \le cm$ ($m \ge 1$), отже, виконується нерівність $-cm < a < cm$.

Знайдемо в цій послідовності найбільше число, яке не перевищує a, позначимо його через mq.

Наступне число $m(q+1)$ буде вже більше ніж a:

$$mq \le a < m(q+1). \qquad (1)$$

Отже, число q обрано. Позначимо через r число $a - mq$; $r = a - mq$; $a = mq + r$.

Підставимо $a = mq + r$ у нерівність (1): $mq \le mq + r < mq + m$, звідси $0 \le r < m$.

Таким чином, числа q і r знайдені, тобто доведено, що ділення з остачею завжди можливе.

Доведемо, що число a можна подати у вигляді $a = mq + r$ єдино можливим способом. Припустимо, що число a у даному вигляді можна подати двома способами:

$$a = mq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < m;\ a = mq_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < m.$$

Знайдемо різницю цих рівностей: $0 = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$. Звідси $r_1 - r_2 = m(q_1 - q_2)$, тобто число $r_1 - r_2$ ділиться на m. Нехай $r_1 \ne r_2$ і, для визначеності, $r_1 > r_2$. Тоді $r_1 - r_2 > 0$ і $r_1 - r_2 \le r_1 < m$. Звідси випливає, що $0 < r_1 - r_2 < m$. Це суперечить тому, що $r_1 - r_2$ ділиться на m. Отже, припущення, що $r_1 \ne r_2$ неправильне і $r_1 = r_2$.

Тоді $(q_1 - q_2)m = 0$ ($m \ge 1$), $q_1 - q_2 = 0$, $q_1 = q_2$.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що будь-яке ціле число a може бути подано в одному із виглядів:

$$a = mq,$$
$$a = mq + 1,$$
$$a = mq + 2,$$
$$\ldots$$
$$a = mq + (m-1).$$

Таким чином, при діленні на число m існує m остач: $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$.

Зокрема, при діленні на 2 множина всіх цілих чисел розбивається на два класи: числа, які можуть бути записані у вигляді $2k$ — парні та числа, які можуть бути записані у вигляді $2k+1$ — непарні.

При діленні на 3 маємо три класи чисел: $3k$, $3k+1$, $3k+2$. Ці міркування часто використовуються під час розв'язування задач.

Приклад 1. Довести, що при будь-якому цілому n число $n^3 - n$ ділиться на 6.

Розв'язання. Розкладемо вираз $n^3 - n$ на множники:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1).$$

Число n може бути подано в таких виглядах:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Розглянемо всі шість випадків.
1) $n = 6k$, тоді $(n-1)n(n+1) = (6k-1)6k(6k+1) \,\vdots\, 6$;
2) $n = 6k+1$, тоді $(n-1)n(n+1) = 6k(6k+1)(6k+2) \,\vdots\, 6$;
3) $n = 6k+2$, тоді $(n-1)n(n+1) = (6k+1)(6k+2)(6k+3) =$
$= 6(6k+1)(3k+1)(2k+1) \,\vdots\, 6$;

4) $n = 6k + 3$, тоді

$$(n-1)n(n+1) = (6k+2)(6k+3)(6k+4) = 12(3k+1)(2k+1)(3k+2) \vdots 6;$$

5) $n = 6k + 4$, тоді

$$(n-1)n(n+1) = (6k+3)(6k+4)(6k+5) = 6(2k+1)(3k+2)(6k+5) \vdots 6;$$

6) $n = 6k + 5$, тоді

$$(n-1)n(n+1) = (6k+4)(6k+5)(6k+6) = 12(3k+2)(6k+5)(k+1) \vdots 6.$$

Таким чином, при будь-якому натуральному n число $n^3 - n$ ділиться на 6, що і треба було довести.

Приклад 2. Довести, що при жодному цілому n число $n^2 + 1$ не ділиться на 3.

Розв'язання. Розглянемо класи подільності на 3.

1) $n = 3k$, тоді $n^2 + 1 = (3k)^2 + 1 = 9k^2 + 1$. При діленні на 3 дістанемо остачу 1, отже, $n^2 + 1$ не ділиться на 3.
2) $n = 3k + 1$, тоді $n^2 + 1 = (3k+1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3\left(3k^2 + 2\right) + 2$.

При діленні на 3 дістанемо остачу 2, отже, $n^2 + 1$ не ділиться на 3.

3) $n = 3k + 2$, тоді

$$n^2 + 1 = (3k+2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 4 + 1 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) + 2.$$

При діленні на 3 дістанемо остачу 2, отже, $n^2 + 1$ не ділиться на 3.

Висновок. При жодному цілому n число $n^2 + 1$ на 3 не ділиться, що і треба було довести.

Приклад 3. Довести, що при діленні суми квадратів двох послідовних цілих чисел на 4 дістанемо остачу 1.

Розв'язання. Розглянемо послідовні цілі числа n і $n + 1$, помітимо, що їх добуток — парне число (див. приклад 1 п. 2). Сума квадратів цих чисел:

$$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 =$$
$$= 2n(n+1) + 1 = 2 \cdot 2k + 1 = 4k + 1.$$

Таким чином, при діленні суми квадратів двох послідовних цілих чисел на 4, в остачі дістаємо 1.

Приклад 4. При діленні парного числа a на 3 остача дорівнює 1. Чому дорівнює остача від ділення числа a на 6?

Розв'язання. При діленні числа a на 3 остача дорівнює 1, тому число a можна подати у вигляді $a = 3n + 1$. Число a — парне, отже,

рівність $a = 3n + 1$ можлива тільки у випадку непарного n, тобто $n = 2m + 1$. Тоді $a = 3n + 1 = 3(2m+1) + 1 = 6m + 4$.

Відповідь. 4.

Приклад 5. Довести, що число $n^2 + n + 9$ не є кратним 49 при жодному натуральному n.

Розв'язання. Перетворимо вираз $n^2 + n + 9$:

$$n^2 + n + 9 = (n+4)(n-3) + 21.$$

Якщо $n + 4$ є кратним 7, то $n - 3$ також є кратним 7 і $(n+4)(n-3) \vdots 49$, але 21 не ділиться на 49, тому $n^2 + n + 9$ не ділиться на 49.

Якщо $n + 4$ не ділиться на 7, то і $n - 3$ не ділиться на 7; $(n+4)(n-3)$ не ділиться на 7, тому $(n+4)(n-3) + 21$ не ділиться на 7, а тим більше не ділиться на 49.

Отже, $n^2 + n + 9$ не є кратним 49 при жодному натуральному n, що і треба було довести.

Приклад 6. Відомо, що при діленні числа a на 5 остача дорівнює 1, а при діленні на 3 — остача дорівнює 2.

Знайти остачу від ділення числа a на 15.

Розв'язання. З умови випливає, що $a = 5k + 1$ або $a = 3n + 2$. Домножимо першу рівність на 6, другу — на 5 і знайдемо їхню різницю:

$$\left.\begin{array}{l} 6a = 30k + 6 \\ 5a = 15n + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 30k - 15n - 4 = 30k - 15(n+1) - 4 + 15 = 15(2k - n - 1) + 11.$$

Відповідь. 11.

Приклад 7. Довести, що з п'яти будь-яких цілих чисел завжди можна вибрати три, сума яких ділиться на 3.

Розв'язання. Розглянемо можливі випадки.

1) Серед п'яти даних чисел знайдеться три числа з однаковими остачами від ділення на 3; їхня сума ділиться на 3.
2) Якщо серед п'яти даних чисел немає трьох чисел з однаковими остачами від ділення на 3, то знайдеться три числа, при діленні яких на 3, остачі будуть дорівнювати 0; 1; 2. Їхня сума також ділиться на 3, що і треба було довести.

Завдання для самостійного розв'язування

4.17. Знайдіть частку і остачу при діленні числа a на число m, якщо:

а) $a = 305$, $m = 43$; б) $a = -305$, $m = 43$;
в) $a = 305$, $m = -43$; г) $a = -305$, $m = -43$;
д) $a = -1$, $m = -4$; е) $a = -2$, $m = 7$;

ж) $a=0$, $m=-3$.

4.18. Число a — парне, число b — непарне. Яким (парним або непарним) може бути число:

а) $a+b$; б) $a-b$;
в) ab; г) $3a+b$;
д) a^2+b; е) $a+b^2$;
ж) $a+2b$?

4.19. Число a ділиться на 3, число b не ділиться на 3. Чи ділиться на 3 число:

а) $a+b$; б) $a-b$;
в) ab?

4.20. Число a — парне. Чи може остача від ділення числа a на 6 дорівнювати 1? 3?

4.21. При діленні числа a на 12 остача дорівнює 7. Чому дорівнює остача від ділення числа a на 2; 3; 4; 6?

4.22. Непарне число a кратне 3. Чому дорівнює остача від ділення числа a на 6?

4.23. Які натуральні числа можна записати у вигляді суми чотирьох послідовних чисел?

4.24. Кожне з парних чисел a і b не ділиться на 6. Остачі від ділення цих чисел на 6 — різні. Доведіть, що сума $a+b$ ділиться на 6.

4.25. Число a не ділиться ні на 2, ні на 3. Знайдіть остачу від ділення числа a^2 на 6.

4.26. Числа a і b — непарні, остачі від ділення цих чисел на 4 — різні. Доведіть, що a^2-b^2 кратне 8.

4.27. Парне число a не ділиться на 6. Чому дорівнює остача від ділення числа a^2 на 12?

4.28. Знайдіть усі числа, при діленні яких на 3 остача дорівнює 1, а при діленні на 5 остача дорівнює 3.

4.29. Відомо, що при діленні числа a на 5 остача дорівнює 2, а при діленні на 3 — остача дорівнює 1. Знайдіть остачу від ділення числа a на 15.

4.30. Відомо, що при діленні числа a на 3 остача дорівнює 1, а при діленні на 4 — остача дорівнює 3. Знайдіть остачу від ділення числа a на: а) 12; б) 6.

4.31. Чи існує ціле число, при діленні якого на 12 остача дорівнює 11, а при діленні на 18 — остача дорівнює 1?

4.32. Доведіть, що при діленні квадрата непарного числа на 8 остача дорівнює 1.

4.33. Знайдіть остачу від ділення числа $10!+49$ на 4.

Доведіть, що при будь-якому натуральному n справедливе твердження (4.34–4.37).

4.34. а) $\left(n^2+3n\right)\vdots 2$; б) $n(3n+1)\vdots 2$.

4.35. а) $n(2n-1)(2n+1)\vdots 3$; б) $n\left(2n^2+1\right)\vdots 3$; в) $\left(n^3+5n\right)\vdots 3$.

4.36. а) $n(n+1)^2(3n+2)\vdots 4$; б) $n^2\left(n^2-1\right)\vdots 4$.

4.37. а) $n(n+1)(2n+1)\vdots 6$; б) $\left(n^3+11n\right)\vdots 6$; в) $n\left(n^2+6n+5\right)\vdots 6$.

4.38. Доведіть, що якщо число a не кратне 5, то або a^2+1 ділиться на 5, або a^2-1 ділиться на 5.

4.39. Доведіть, що при будь-якому цілому n число n^5-n ділиться на 5.

4.40. Доведіть, що при будь-якому цілому n число n^7-n ділиться на 7.

4.41. Відомо, що a^2+b^2 ділиться на 3. Доведіть, що a і b ділиться на 3.

4.42. Доведіть, що якщо хоча б одне з чисел a, b не ділиться на 7, то і число a^2+b^2 не ділиться на 7.

4.43. Доведіть, що якщо a^2+b^2 ділиться на 7, то a^2+b^2 ділиться на 49.

4.44. Доведіть, що при будь-яких a і b число $ab\left(a^4-b^4\right)$ ділиться на 5.

4.45. Доведіть, що якими б не були цілі числа a, b, c, число $a^2+b^2+c^2+1$ не ділиться на 8.

4.46. Доведіть, що якщо сума трьох цілих чисел ділиться на 6, то і сума кубів цих чисел ділиться на 6.

4.47. Жодне з двох трицифрових чисел не ділиться на 37, а їхня сума ділиться на 37. Приписавши одне з чисел до другого, дістанемо шестицифрове число. Доведіть, що воно ділиться на 37.

4.48. Остачі, здобуті від ділення двох трицифрових чисел на 7, рівні. Приписавши одне з чисел до другого, дістанемо шестицифрове число. Доведіть, що воно ділиться на 7.

4.49. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число виду: а) $3n-1$; б) $4n-1$ не є квадратом цілого числа.

4.50. При діленні чисел 2146, 1991, 1805 на n дістали рівні остачі. Знайдіть n.

4.51. Доведіть, що при жодному натуральному n:

а) n^2+3n+5 не ділиться на 121;

б) $n^2+5n+16$ не ділиться на 169.

4.52. Доведіть, що серед 2008 натуральних чисел знайдеться два числа, різниця яких ділиться на 2007.

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Число a кратне 3. Чи може остача від ділення числа a на 12 дорівнювати 2?
2. При діленні чисел a і b на m дістали однакові остачі. Доведіть, що різниця $a-b$ ділиться на m. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.
3. Парне число a не ділиться на 4. Доведіть, що остача від ділення a^2 на 32 дорівнює 4.
4. Доведіть, що якщо m і n — непарні числа, то m^2-n^2 ділиться на 8.
5. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число n^3+3n^2+2n кратне 6.
6. Доведіть, що число n^2+n+9 не кратне 25 при жодному натуральному n.

Варіант 2

1. Число a кратне 4. Чи може остача від ділення числа a на 12 дорівнювати 2?
2. При діленні чисел a і b на m дістали однакові остачі. Доведіть, що різниця $2a-2b$ ділиться на m.
3. Доведіть, що квадрат непарного числа при діленні на 8 дає остачу 1.
4. Нехай a і b — цілі числа. Доведіть, що якщо $a^2+9ab+b^2$ ділиться на 11, то й a^2-b^2 ділиться на 11.
5. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число n^3-3n^2+2n кратне 6.
6. Доведіть, що число n^3+2 не ділиться на 9 при жодному натуральному n.

4. Взаємно прості числа

Якщо число a ділиться на m, то число m називають дільником числа a. Наприклад, числа 2 і −5 є дільниками числа 20; числа −6 і 8 є дільниками числа −24.

> ***Означення.*** Два числа називаються взаємно простими, якщо вони не мають спільних натуральних дільників, крім одиниці.

Наприклад, числа 8 і 15 взаємно прості. Дійсно, число 8 не може ділитися на числа, більші, ніж воно саме. Отже, натуральні дільники числа 8 можуть знаходитись тільки серед чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. На 3, 5, 6, 7 число 8 не ділиться. Залишаються 1, 2, 4, 8 — вони і є натуральними дільниками числа 8. Але число 15 на 2, 4 і 8 не ділиться. Числа 8 і 15 мають тільки один спільний дільник серед натуральних чисел — це число 1. Це означає, що числа 8 і 15 взаємно прості.

Числа 24 і 28 не є взаємно простими, тому що мають спільні натуральні дільники, крім одиниці (наприклад, число 2).

Теорема 1. Якщо числа a і b взаємно прості, то існують такі числа x_0 і y_0, що $ax_0+by_0=1$.

Доведення. Розглянемо всі цілі числа, які можна записати у вигляді

$$ax+by, \qquad (1)$$

де x, y — деякі цілі числа. Наприклад, серед них будуть числа $a+0b$, $a-2b$, $3a+5b$ і т. д. Серед чисел виду (1) будуть натуральні. Дійсно, якщо a від'ємне, то $-a=(-1)a+0b$ — додатне (і ціле), тобто натуральне. Розглянемо найменше натуральне число, яке можна подати у вигляді $ax+by$. Нехай це буде $c=ax_0+by_0$. Доведемо, що $c=1$, тобто $ax_0+by_0=1$ (цим самим і буде доведена теорема).

Проведемо доведення методом від супротивного.

Припустимо, що $c>1$ і розділимо a на c з остачею: $a=cq+r$, де $0\le r<c$. Якщо $r\ne 0$ (тобто r — натуральне число), то

$$r=a-cq=a-(ax_0+by_0)q=a(1-x_0q)+b(-y_0q).$$

Таким чином, число r, яке менше від c, вдалося подати у вигляді $r=ax+by$. Але це неможливо, тому що c — найменше натуральне число такого виду.

Отже, $r=0$ і $a=cq$, тобто a ділиться на c. Тобто числа a і b мають спільний дільник c, більший від 1. Це суперечить тому, що числа a і b взаємно прості. Ця суперечність доводить, що $c=1$. Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 1 дає необхідну умову того, що числа a і b взаємно прості.

Теорема 2. Якщо число a ділиться на кожне із двох взаємно простих чисел m і n, то воно ділиться і на добуток $m\cdot n$.

Доведення. Число a ділиться на m, отже існує ціле число k таке, що $a=mk$ (1).

Аналогічно $a=nl$ (2), де l — деяке ціле число.

Числа m і n взаємно прості, тобто існують такі цілі числа x і y, що $mx+ny=1$. Помножимо обидві частини цієї рівності на a:

$$a=amx+any.$$

Підставимо в праву частину рівності замість a його значення з формул (2) і (1):

$$a = nlmx + mkny = mn(lx + ky).$$

Число $lx + ky$ — ціле. Отже, a ділиться на mn, що і треба було довести.

Проілюструємо цю теорему на прикладах.

Приклад 1. Число 24 ділиться на 3 і на 4. Числа 3 і 4 взаємно прості, отже, число 24 повинно ділиться на добуток $3 \cdot 4 = 12$.

Дійсно, 24 ділиться на 12.

Приклад 2. Число 24 ділиться на 8 і на 12, проте на добуток $8 \cdot 12 = 96$ не ділиться, оскільки числа 8 і 12 не є взаємно простими. В цьому випадку теорему 2 застосовувати не можна.

Приклад 3. Довести, що при будь-якому цілому n число $n^3 - n$ ділиться на 6.

Розв'язання. Ми вже розглядали цей приклад в п. 3. Скористаємось розкладанням на множники:

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1).$$

Це добуток трьох послідовних чисел, тому він ділиться і на 2, і на 3. Числа 2 і 3 взаємно прості, тому $n^3 - n$ ділиться на добуток $2 \cdot 3 = 6$. Тобто $\left(n^2 - n\right) \vdots 6$, що і треба було довести.

Приклад 4. Довести, що якщо n не ділиться на 3 і на 2, де $n > 3$, то при діленні n^2 на 24 остача дорівнює 1.

Розв'язання. Число n не кратне 2, тому $n = 2k + 1$.

Розглянемо $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$ — ділиться на 8.

Число n не кратне 3, тому або $n - 1$, або $n + 1$ ділиться на 3. Тоді $\left(n^2 - 1\right) \vdots 3$.

Оскільки 3 і 8 — взаємно прості числа, то

$$\left(n^2 - 1\right) \vdots (3 \cdot 8),\ \left(n^2 - 1\right) \vdots 24 \text{ і } n^2 = 24k + 1,$$

що і треба було довести.

Теорема 3. Якщо добуток ac ділиться на m і числа c і m взаємно прості, то a ділиться на m.

Доведення. Числа c і m взаємно прості, тому існують такі цілі числа x і y, що $cx + my = 1$. Помножимо цю рівність на a, дістанемо: $a = acx + amy$.

Добуток ac за умовою ділиться на m, тому $(acx + amy) \vdots m$, отже, a ділиться на m, що і треба було довести.

Приклад 5. Чи існує число, для запису якого використовуються тільки одиниці (1; 11; 111; ...; 11...1), яке ділиться на 2009?

Розв'язання. Нехай в цій нескінченній множині чисел немає жодного, яке ділилося б на 2009. Тоді розглянемо класи остач: 1; 2; 3; ..., 2008. Цих класів 2008, а чисел — більше. Тому за принципом Діріхле знайдуться два числа, які мають однакові остачі при діленні на 2009. Отже, різниця цих чисел ділиться на 2009. Зрозуміло, що різниця цих чисел має вигляд: 11...10...0. Запишемо це число у вигляді добутку 11...1 · 10...0. Числа 10...0 і 2009 взаємно прості, тому число 11...1 ділиться на 2009.

Відповідь. Таке число існує.

Завдання для самостійного розв'язування

4.53. Чи правильне твердження, що числа n і $n + 1$ взаємно прості?

4.54. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n(n+1)^2(n+2)^2$ ділиться на 12.

4.55. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $2^{n+1} + 2^n$ ділиться на 6.

4.56. Доведіть, що при будь-якому непарному n число $n^3 - n$ ділиться на 24.

4.57. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^5 - n$ ділиться на 30.

4.58. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ кратне 120.

4.59. При яких натуральних значеннях n число $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ ділиться на 120?

4.60. Доведіть, що при будь-якому цілому n вираз

$$\frac{n^5}{120} + \frac{n^4}{12} + \frac{7n^3}{24} + \frac{5n^2}{12} + \frac{n}{5}$$

є цілим числом.

4.61. Доведіть, що при будь-яких цілих a і b число

$$ab\left(a^2 - b^2\right)\left(4a^2 - b^2\right)$$

ділиться на 15.

4.62. Дріб $\frac{a-b}{a+b}$ скоротний. Чи скоротний дріб $\frac{a}{b}$?

4.63. Відомо, що числа n і 6 взаємно прості. Доведіть, що при діленні n^2 на 24 остача дорівнює 1.

4.64. Доведіть, що число виду 9^n+1 не може закінчуватися двома або більше нулями.

4.65. Знайдіть найменше натуральне число, при діленні якого на 2 остача дорівнює 1, при діленні на 3 — остача дорівнює 2, при діленні на 4 — остача дорівнює 3, при діленні на 5 — остача дорівнює 4, при діленні на 6 — остача дорівнює 5.

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^2(n^2-1)$ ділиться на 12.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $2^{n+2}+2^{n+1}+2^n$ ділиться на 14.
3. Доведіть, що якщо n^2-1 ділиться на 2, то n^2-1 ділиться і на 8.
4. Знайдіть найменше натуральне число, яке ділиться на 7, а при діленні на 2, 3, 4, 5, 6 остача дорівнює 1.

Варіант 2

1. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^2(n^2+3n+2)$ ділиться на 12.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $3^{n+2}+3^{n+1}+3^n$ ділиться на 14.
3. Доведіть, що якщо n^2-1 ділиться на 2, то n^2-1 ділиться і на 8.
4. Знайдіть найменше натуральне число, яке ділиться на 6, а при діленні на 2, 3, 4, 5, остача дорівнює 1.

5. Формули скороченого множення і подільність

Ми вже знаємо цілу низку корисних тотожностей, які називають формулами скороченого множення:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Ці формули можна використовувати для розкладання многочленів на множники, звідки випливають корисні факти:

$$(a^2-b^2)\vdots(a-b);\ (a^2-b^2)\vdots(a+b);\ (a^3-b^3)\vdots(a-b);\ (a^3+b^3)\vdots(a+b).$$

Можна довести, що для будь-якого натурального числа n справедливі такі твердження:

$$(a^n-b^n)\vdots(a-b);\ (a^{2n}-b^{2n})\vdots(a+b);\ (a^{2n+1}+b^{2n+1})\vdots(a+b).$$

Розглянемо приклади використання цих тверджень.

Приклад 1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $2^{4n}-1$ кратне 15.

Розв'язання. $2^{4n}-1=(2^4)^n-1=16^n-1$ — ділиться на $16-1=15$.

Що і треба було довести.

Приклад 2. Довести, що при парному натуральному n число 7^n-5^n ділиться на 24.

Розв'язання. За умовою n — парне, отже $n=2k$.

$$7^n-5^n=7^{2k}-5^{2k}=(7^2)^k-(5^2)^k=49^k-25^k$$

ділиться на $49-25=24$, що і треба було довести.

Приклад 3. Довести, що 9^n+4^{n+1} кратне 5 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання. Перетворимо вираз 9^n+4^{n+1} таким чином:

$9^n+4^{n+1}=9^n-4^n+4^n+4\cdot4^n=(9^n-4^n)+5\cdot4^n.$

Число 9^n-4^n ділиться на $9-4=5$ і $5\cdot4^n\vdots5$, тому $9^n-4^n+5\cdot4^n$ ділиться на 5, звідки 9^n+4^{n+1} ділиться на 5, що і треба було довести.

Приклад 4. Довести, що при будь-якому натуральному n число $7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n$ ділиться на 19.

Розв'язання. Перетворимо вираз $7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n$.

$$7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n=7\cdot25^n-7\cdot6^n+7\cdot6^n+12\cdot6^n=7(25^n-6^n)+19\cdot6^n.$$

Число 25^n-6^n ділиться на $25-6=19$ і $19\cdot6^n\vdots19$, тому $7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n$ ділиться на 19, що і треба було довести.

Приклад 5. Довести, що при будь-якому натуральному n число $1^n+3^n+5^n+7^n$ кратне 4.

Розв'язання

$$7^n+5^n+3^n+1^n=(7^n-3^n)+(5^n-1^n)+2\cdot3^n+2=$$
$$=(7^n-3^n)+(5^n-1^n)+2(3^n+1).$$

Перший доданок 7^n-3^n ділиться на $7-3=4$;
другий доданок 5^n-1^n ділиться на $5-1=4$;

третій доданок $2\left(3^n+1\right)$ ділиться на 4, оскільки 3^n+1 — парне число (сума двох непарних чисел).

Таким чином, $7^n+5^n+3^n+1^n$ ділиться на 4, що і треба було довести.

Завдання для самостійного розв'язування

4.66. Доведіть, що непарний натуральний степінь числа 23, збільшений на 1, ділиться на 12.

4.67. Доведіть, що парний натуральний степінь числа 7, зменшений на 1, ділиться на 48.

4.68. Доведіть, що при будь-якому непарному натуральному n:

а) $\left(5^n+2^n\right)\vdots 7$; б) $\left(5^n+11^n+2\right)\vdots 6$.

4.69. Доведіть, що при будь-якому парному натуральному n:

а) $\left(5^n-3^n\right)\vdots 16$; б) $\left(4^n+14\right)\vdots 15$.

4.70. Доведіть, що при будь-якому парному натуральному n:

а) $\left(21^n+4^{n+2}\right)\vdots 17$; б) $\left(15^n+7^{n+1}\right)\vdots 8$;

в) $\left(13^n+3^{n+2}\right)\vdots 10$; г) $\left(5^n+7\cdot 9^n\right)\vdots 4$;

д) $\left(7^{n+2}+8^{2n+1}\right)\vdots 57$; е) $\left(5^n+8^n-2^{n+1}\right)\vdots 3$;

ж) $\left(3^n+5^n+7^n+9^n\right)\vdots 4$; з) $\left(5^n+7^n+9^n+11^n\right)\vdots 4$.

4.71. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число 5^n-3^n+2n ділиться на 4.

6. Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда*

Кожне ціле число, яке не дорівнює нулю, має скінченну кількість дільників. Якщо m є дільником числа a, то $-m$ також є дільником числа a. Ми будемо розглядати тільки натуральні дільники числа a. Найменшим натуральним дільником числа a є число 1, найбільшим — число $|a|$.

Числа a і b, хоча б одне із яких не дорівнює нулю, мають скінченну кількість спільних дільників. Найменшим спільним дільником чисел a і b є одиниця. Найбільший спільний дільник чисел a і b позначають НСД $(a;b)$ або $d(a;b)$. Наприклад, числа 36 і 24 мають 6 спільних дільників: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Найбільшим спільним дільником є 12, тобто $d(36;24)=12$.

Розглянемо деякі властивості найбільшого спільного дільника.

* Евклід (бл. 365 – бл. 300 до н. е.) — давньогрецький математик.

Теорема 1. Нехай a і b — цілі числа, хоча б одне із яких не дорівнює нулю, $d=d(a;b)$ — їхній найбільший спільний дільник.

Тоді існують цілі числа m і n, такі що $ma+nb=d$.

Доведення. Оскільки d є дільником числа a, то $a=kd$ (1), аналогічно $b=ld$ (2). Числа k і l — взаємно прості. Дійсно, якщо б числа k і l мали спільний дільник c $(c>1)$, то $k=cx$ і $l=cy$, тому $a=cdx$ і $b=cdy$, отже, число cd — спільний дільник чисел a і b, причому $cd>d$ $(c>1)$. Але це суперечить тому, що d — найбільший спільний дільник чисел a і b. Отже, k і l — взаємно прості числа. За теоремою 1 п. 4 існують такі цілі числа m і n, що $km+nl=1$. Помножимо цю рівність на d і враховуємо (1) і (2): $kdm+ldn=d$; $am+bn=d$, що і треба було довести.

Теорема 2. Нехай a і b — цілі числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, $d=d(a;b)$ — їхній найбільший спільний дільник. Число c є спільним дільником чисел a і b тоді, і тільки тоді, коли воно є дільником числа d.

Доведення

1) Нехай c — спільний дільник чисел a і b, тоді a ділиться на c, b ділиться на c. $d=am+bn$, отже, d також ділиться на c.
2) Якщо d ділиться на c, то з того, що $a=kd$ і $b=ld$ випливає, що a і b діляться на c. Теорему доведено.

Існує досить простий спосіб, який дозволяє знаходити найбільший спільний дільник двох натуральних чисел. Він називається алгоритмом Евкліда.

Алгоритм Евкліда ґрунтується на лемі.

Лема. Нехай a і b — натуральні числа, r — остача від ділення a і b. Тоді найбільший спільний дільник чисел a і b дорівнює найбільшому спільному дільнику чисел b і r. Тобто НСД$(a;b)=$НСД$(b;r)$.

Доведення. Оскільки r — остача від ділення a на b, то $a=bq+r$, де q — ціле число. Нехай c — деякий спільний дільник чисел a і b. Враховуючи, що $r=a-bq$, r ділиться на c, отже, c — спільний дільник пари $(b;r)$.

Навпаки, якщо c — спільний дільник чисел b і r, то число $a=bq+r$ також ділиться на c, тому c — спільний дільник чисел a і b.

Таким чином, числа a і b мають ті ж самі спільні дільники, що й числа b і r. Отже, найбільший спільний дільник чисел a і b співпадає з найбільшим спільним дільником чисел b і r, що і треба було довести.

Продемонструємо застосування цієї леми на прикладі.

Приклад 1. Знайти найбільший спільний дільник чисел 645 і 381.

Розв'язання

1) Поділимо з остачею 645 на 381: $645 = 381 \cdot 1 + 264$.
Згідно з лемою $\text{НСД}(645;381) = \text{НСД}(381;264)$.
2) Поділимо 381 на 264: $381 = 264 \cdot 1 + 117$;

$$\text{НСД}(381;264) = \text{НСД}(117;30).$$

3) Поділимо 117 на 30; $117 = 30 \cdot 3 + 27$;

$$\text{НСД}(117;30) = \text{НСД}(30;27).$$

5) Поділимо 30 на 27: $30 = 27 \cdot 1 + 3$;

$$\text{НСД}(30;27) = \text{НСД}(27;3).$$

6) Поділимо 27 на 3: $27 = 3 \cdot 9 + 0$; $\text{НСД}(27;3) = 3$. Дістали:

$$\text{НСД}(645;381) = \text{НСД}(381;264) = \text{НСД}(264;117) = \text{НСД}(117;30) =$$
$$= \text{НСД}(30;27) = \text{НСД}(27;3) = 3.$$

Відповідь. $\text{НДС}(645;381) = 3$.

Загальний вигляд алгоритма Евкліда

1. Поділивши a на b з остачею r_1, дістанемо: $a = bq_1 + r_1$.
2. Поділивши b на r_1 з остачею на r_2, дістанемо: $b = r_1 q_1 + r_2$.
3. Поділивши r_1 на r_2 з остачею r_3, дістанемо: $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ і так далі.

В результаті ми дістанемо спадну послідовність натуральних чисел: $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$. Натуральних чисел, менших ніж a, скінченна кількість. Тому, на якомусь кроці ця послідовність обірветься, тобто r_{k-1} розділиться на r_k без остачі. Тоді $\text{НСД}(r_{k-1};r_k) = r_k$, тобто остання, відмінна від нуля, остача і є найбільшим спільним дільником чисел a і b.

Примітка. Якщо $\text{НСД}(a;b) = 1$, то числа a і b є взаємно простими.

Враховуючи алгоритм Евкліда і теорему 1 п. 6, дістанемо ознаку взаємно простих чисел.

Натуральні числа a і b є взаємно простими тоді і тільки тоді, коли існують такі числа m і n, що $am + bn = 1$.

Приклад 2. Довести, що числа n і $n+1$ — взаємно прості.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм Евкліда.

$$\text{НСД}(n+1;n) = \text{НСД}(n;1) = 1,$$

тобто числа n і $n+1$ — взаємно прості, що і треба було довести.

Приклад 3. Довести, що дріб $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний.

Розв'язання. *I спосіб.* Розглянемо

$$\text{НСД}(30n+2;12n+1) = \text{НСД}(12n+1;6n) = \text{НСД}(6n;1) = 1.$$

Отже, числа $12n+1$ і $30n+2$ взаємно прості, тому дріб $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний, що і треба було довести.

II спосіб. Доведемо, що числа $30n+2$ і $12n+1$ взаємно прості, застосувавши ознаку. Для цього підберемо такі цілі числа x і y, щоб виконувалась рівність: $x(30n+2) + y(12n+1) = 1$. Після перетворення дістанемо: $(30x+12y)n + 2x + y = 1$. Звідси випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} 30x + 12y = 0, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\left\{\begin{array}{l|l} 5x + 2y = 0, & 1 \\ 2x + y = 1 & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 5. \end{cases}$$

Дійсно, $-2(30n+2) + 5(12n+1) = 1$, отже, числа $30n+2$ і $12n+1$ взаємно прості і дріб $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний, що і треба було довести.

Завдання для самостійного розв'язування

4.72. Знайдіть за допомогою алгоритма Евкліда $\text{НСД}(a;b)$, якщо:

а) $a = 846$, $b = 246$; б) $a = 1960$, $b = 588$;
в) $a = 15283$, $b = 10013$; г) $a = 2747$, $b = 2173$;
д) $a = 6499$, $b = 2077$; е) $a = 12763$, $b = 7571$;
ж) $a = 2001$, $b = 1947$; з) $a = 3503$, $b = 2231$.

4.73. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:

а) $2n+2$ і $2n$; б) $6n+3$ і $3n4$
в) $30n+25$ і $20n+15$; г) $2n+3$ і $n+7$.

4.74. Доведіть, що:

а) $\text{НСД}(a;b) = \text{НСД}(a;a+b)$; б) $\text{НСД}(a;b) = \text{НСД}(a;a-b)$.

4.75. Доведіть, що $\text{НСД}(13a+8b;5a+3b) = \text{НСД}(a;b)$.

4.76. Доведіть, що якщо числа a і b взаємно прості, то

$$\text{НСД}(11a+2b;18a+5b)$$

дорівнює або 1, або 19.

4.77. Доведіть, що якщо НСД$(a;b)=1$, то:

а) НСД$(ab;a+b)=1$; б) НСД$(ab;a-b)=1$.

4.78. Доведіть, що при будь-якому натуральному n числа $\frac{n(n+1)}{2}$ і $2n+1$ взаємно прості.

4.79. Доведіть, що дріб $\frac{n+1}{2n+1}$ нескоротний при всіх натуральних n.

7. Найменше спільне кратне

Кратне число a, яке не дорівнює нулю, має безліч кратних; всі числа..., $-5a, -4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, \ldots$ є кратними числа a.

Далі ми будемо розглядати тільки натуральні числа. Для будь-яких натуральних чисел a і b можна знайти натуральне число, яке є їхнім спільним кратним. Наприклад, спільним кратним чисел a і b є добуток ab: він ділиться на a і на b. Трапляється, що числа a і b мають спільне кратне, менше від добутку ab. Наприклад, добуток чисел 18 і 24 дорівнює 432, але числа 18 і 24 мають спільні кратні, менші ніж 432, — це числа 72, 144, 216, 288, 360.

Означення. Найменше натуральне число серед спільних кратних чисел a і b, називається найменшим спільним кратним чисел a і b. Позначається НСК$(a;b)$. Для чисел 18 і 24: НСК $(18;24)=72$.

Теорема. Для будь-яких натуральних чисел a і b добуток їхнього найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного дорівнює добутку чисел ab. НСД$(a;b)\cdot$НСК $(a;b)=ab$.

Доведення. Позначимо НСД$(a;b)=d$; НСК$(a;b)=n$. Тоді $a=kd$, $b=ld$, де k і l — взаємно прості числа (див. теорему 1 п. 6); $n=xa$, $n=yb$, де x і y — деякі натуральні числа.

Таким чином, $n=xkd$ і $n=yld$, звідки $\frac{n}{d}=xk$ і $\frac{n}{d}=yl$. Бачимо, що $\frac{n}{d}$ — натуральне число, яке ділиться і на k, і на l. Оскільки числа k і l взаємно прості, то $\frac{n}{d}$ ділиться на їхній добуток (теорема 2 п. 4), тобто $\frac{n}{d}=ckl$, де c — деяке натуральне число, яке є спільним кратним чисел a і b, має вигляд $n=ckld$, де c — деяке натуральне число. Оскільки c — натуральне число, то $c\ge 1$, тому $n\ge kld$.

Розглянемо число kld. $kld=l\cdot kd=la$, тобто kld ділиться на a; $kld=k\cdot ld=kb$, тобто kld ділиться на b.

Звідси випливає, що kld є найменшим спільним кратним чисел a і b: НСК$(a;b)=kld$.

Помножимо цю рівність на число НСД$(a;b)=d$, дістанемо НСД$(a;b)\cdot$НСК$(a;b)=kld\cdot d=kd\cdot ld=ab$, що і треба було довести.

Наслідок 1. Найменше спільне кратне двох натуральних чисел a і b можна знаходити за формулою: НСК$(a;b)=\frac{ab}{\text{НСД}(a;b)}$.

Наслідок 2. Якщо числа a і b взаємно прості, то їхнє найменше спільне кратне дорівнює добутку ab.

Приклад 1. Знайти найменше спільне кратне чисел 645 і 381.

Розв'язання. НСД$(645;381)=3$ (див. приклад 1 п. 6)

$$\text{НСК}(645;381)=81915.$$

Відповідь. НСК$(645;381)=81915$.

Приклад 2. Дві подруги купили по одній однаковій книзі. Одна з них заплатила в касу купюрами по 2 гривні, а друга — по 5 гривень; всього в касу вони дали менше ніж 10 купюр. Скільки коштує кожна книга?

Розв'язання. Вартість книги ділиться на 2 і на 5, отже, вона кратна 10. За кожні 10 гривень перша подруга повинна дати в касу 5 купюр, а друга — 2 купюри, тобто загальна кількість купюр кратна 7. За умовою це число менше 10, тому в касу подруги дали 7 купюр. Звідси випливає, що вартість кожної книги 10 гривень.

Відповідь. 10 гривень.

Завдання для самостійного розв'язування

4.80. Добуток двох взаємно простих чисел дорівнює 1328. Чому дорівнює найменше спільне кратне цих чисел? Знайдіть ці числа.

4.81. Знайдіть найменше спільне кратне чисел a і b, якщо:

а) $a=846$, $b=246$; б) $a=1960$, $b=588$;

в) $a=2173$, $b=2747$; г) $a=6499$, $b=2077$;

д) $a=12769$, $b=7571$; е) $a=3503$, $b=2231$.

Вказівка. Скористайтеся деякими результатами вправи 4.17.

4.82. Зведіть дроби $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1237}{30270}$ до спільного знаменника.

4.83. Виконайте додавання дробів $\frac{7}{192}$ і $\frac{187}{1620}$.

4.84. Доведіть, що якщо число c ділиться на кожне з двох натуральних чисел a і b, то воно ділиться на їхнє найменше спільне кратне.

4.85. Знайдіть два натуральних числа, сума яких дорівнює 35, а найменше спільне кратне дорівнює 12.

8. Прості числа

Означення. Натуральне число $p > 1$ називається простим, якщо, крім 1 і p, воно не має інших натуральних дільників.

Означення. Натуральне число $p > 1$ називається складеним, якщо воно має більше ніж два натуральних дільника.

Оскільки одиниця має тільки один натуральний дільник, то вона не є простим, ані складеним числом.

Серед перших 20 натуральних чисел є вісім простих — це числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Усі інші (крім одиниці) — складені.

Для будь-якого відрізка натурального ряду чисел, починаючи із 2, можна «відсіяти» складені числа, користуючись способом, який називається «решето Ератосфена». Покажемо цей спосіб на відрізку чисел від 2 до 20.

Випишемо всі ці числа в таблицю:

$$\underline{2}\quad \underline{3}\quad \cancel{4}\quad \underline{5}\quad \cancel{6}\quad \underline{7}\quad \cancel{8}\quad \cancel{9}\ \cancel{10}$$

$$\underline{11}\ \cancel{12}\ \underline{13}\ \cancel{14}\ \cancel{15}\ \cancel{16}\ \underline{17}\ \cancel{18}\ \underline{19}\ \cancel{20}.$$

Викреслимо всі числа, більші від 2 і кратні 2.

Наступне незакреслене число 3 є простим. Викреслимо всі числа, більші від 3 і кратні 3. Наступне незакреслене число 5 є простим. Але серед незакреслених чисел немає кратних 5 (крім 5).

Числа, які залишилися незакресленими: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 — прості.

Теорема 1. Якщо натуральне число $p > 1$ не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують p, то число p — просте.

Для доведення цієї теореми скористаємося лемою.

Лема. Будь-яке натуральне число, більше від одиниці, має хоча б один простий дільник.

Доведення. Нехай a_1 — дане натуральне число. Якщо a_1 — просте, то a_1 і є простим дільником числа a_1. Якщо a_1 — складене, то знайдеться дільник a_2 числа a_1, який не дорівнює 1 і a_1.

Якщо a_2 — просте число, то a_2 є простим дільником числа a_1. В іншому випадку можна знайти a_3 — дільник a_2, $a_3 \neq 1$, $a_3 \neq a_2$. Отже, маємо $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$. Оскільки натуральних чисел, менших від a_1, скінченна кількість, то врешті-решт знайдеться простий дільник числа a_1.

Доведення теореми 1. Якщо число p не є простим, то знайдеться число a — дільник p, причому $a \neq 1$, $a \neq p$. Таким чином, $p = ab$. Нехай $a \leq b$. Тоді $a^2 \leq ab$, тобто $a^2 \leq p$. Згідно з лемою знайдеться простий дільник q числа a. Зрозуміло, що q є дільник числа p. Оскільки $q \leq a$, то $q^2 \leq p$. Отже, якщо число p не є простим, то знайдеться простий дільник q числа p, квадрат якого не перевищує p. Звідси і випливає справедливість теореми.

Приклад 1. Перевірити, чи є простим число 2003.

Розв'язання. Згідно з теоремою 1 досить перевірити, чи ділиться 2003 на такі прості числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Наступне просте число 47 перевіряти не варто, оскільки $47^2 = 2009$, а $2009 > 2003$. Очевидно, що 2003 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 5. Крім того, $2003 = 2002 + 1 = 2 \cdot 1001 + 1$, а число $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, тому при діленні числа 2003 на 7; на 11; на 13 остача дорівнює 1.

Для простих чисел, які залишилися, маємо:

$$2003 = 17 \cdot 117 + 14;\ 2003 = 19 \cdot 105 + 8;\ 2003 = 23 \cdot 87 + 2;$$

$$2003 = 31 \cdot 64 + 19;\ 2003 = 41 \cdot 48 + 35;\ 2003 = 29 \cdot 69 + 2;$$

$$2003 = 37 \cdot 54 + 5;\ 2003 = 43 \cdot 46 + 25.$$

Висновок. 2003 — просте число.

Приклад 2. Довести, що при натуральному $n > 1$ число $n^4 + 4$ — складене.

Розв'язання. Перетворимо в добуток вираз $n^4 + 4$:

$$n^4 + 4 = \left(n^4 + 4n^2 + 4\right) - 4n^2 =$$

$$= \left(n^2 + 2\right)^2 - (2n)^2 = \left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right).$$

При $n > 1$ число $n^2 - 2n + 2 > 1$, тому $n^4 + 4$ має дільники, які не дорівнюють 1 і $n^4 + 4$, отже число $n^4 + 4$ є складеним, що і треба було довести.

Приклад 3. Довести, що якщо p просте число і $p > 3$, то його можна подати у вигляді $p = 6k - 1$ або $p = 6k + 1$.

Розв'язання. При діленні на 6 існує шість класів остач: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Випадки $p=6k$, $p=6k+2$, $p=6k+3$, $p=6k+4$ неможливі, оскільки p — просте число. Залишаються випадки $p=6k+1$ або $p=6k+5$. Але $p=6k+5=6(k+1)-1$, отже $p=6m+1$ або $p=6m-1$, що і треба було довести.

Приклад 4. Відомо, що числа p, $p+10$ і $p+14$ прості. Знайти p.

Розв'язання. Очевидно, що при $p=2$ умова не виконується, оскільки $p+10=2+10=12$ — не є простим числом.

При $p=3$ числа p, $p+10$ і $p+14$ є простими: $3+10=13$, $3+14=17$, отже, $p=3$ задовольняє умову.

При $p>3$ $p=6k-1$ і тоді $p+10=6k-1+10=6k+9$ — складене або $p=6k+1$ і тоді $p+14=6k+1+14=6k+15$ — складене.

Отже, інших p, які б задовольняли умову, немає.

Відповідь. $p=3$.

Повернемося до «решета Ератосфена». Ми бачимо, що на кожному відрізку натурального ряду кількість простих чисел скінченна. Виникає запитання: чи не відбувається так, що починаючи з деякого числа P, не існує жодного простого числа?

Наступна теорема, яку довів Евклід, дає заперечну відповідь на це запитання.

Теорема 2. Множина простих чисел нескінченна.

Доведення. Припустимо, що кількість простих чисел скінченна. Тоді їх можна перелічити: 2, 3, 5, 7,..., P, де P — найбільше просте число. Нехай число $N=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot P+1$. Згідно з лемою, яку доведено в цьому пункті, це число повинно мати простий дільник. Але число N не ділиться на жодне з чисел 2, 3, 5, 7, ..., P, бо має остачу 1 при діленні на кожне з них. Ця суперечність показує, що припущення про скінченність множини простих чисел неправильне. Отже, множина простих чисел нескінченна, що і треба було довести.

З леми, яку було доведено в цьому пункті, випливає ще один важливий факт.

Теорема 3. Кожне натуральне число, більше від одиниці, може бути розкладено на прості множники.

Будь-які два розклади одного й того самого числа на прості множники можуть відрізнятися тільки порядком множників.

Канонічний вигляд розкладу натурального числа на прості множники: $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}$, де p_1, p_2, ..., p_k — різні прості числа, m_1, m_2, ..., m_k — деякі натуральні числа.

Приклад 5. Розкласти на прості множники число 28 350.

Розв'язання. Будемо послідовно ділити число 28 350 на прості числа 2, 3, 5 і т. д.

$$28350=2\cdot14175=2\cdot3\cdot4725=2\cdot3\cdot3\cdot1575=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot525=$$

$$=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot175=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot35=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7=2\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

— канонічний розклад числа 28 350 на прості множники.

Завдання для самостійного розв'язування

4.86. З'ясуйте, чи є число 353 простим.

4.87. Які з чисел, розташованих між числами 2320 і 2350, є простим?

4.88. Доведіть, що якщо число n — складене, то і 2^n-1 — складене.

4.89. Доведіть, що якщо p — просте число, $p>3$, то p^2-1 ділиться на 24.

4.90. Складіть таблицю всіх простих чисел, менших від 1000.

4.91. Знайдіть усі прості числа p, при яких $8p^2+1$ є простим числом.

4.92. Числа p і $2p+1$ — прості ($p>3$). Доведіть, що число $4p+1$ — складене.

4.93. Знайдіть усі натуральні числа n, такі що числа $n-2$, $n+24$, $n+26$ — прості.

4.94. Доведіть, що число $2^{10}+5^{12}$ — складене.

4.95. Знайдіть усі двоцифрові числа, такі що $\overline{ab}+\overline{ba}$ є точним квадратом.

4.96*. Доведіть, що якщо $(m-1)!+1$ ділиться на m, то число m — просте.

4.97*. Доведіть, що якщо m — просте число, то $(m-1)!+1$ ділиться на m.

4.98*. Доведіть, що існує безліч простих чисел, при діленні яких на 3 остача дорівнює 2.

4.99*. Доведіть, що число $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}$, записане в канонічному вигляді, має $(m_1+1)(m_2+1)\cdot\ldots\cdot(m_k+1)$ натуральних дільників.

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 2736 і 1140.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному n дріб $\dfrac{4n+1}{7n+2}$ нескоротний.
3. Відомо, що числа p, $p+4$, $p+14$ — прості. Знайдіть p.
4. Доведіть, що якщо p — просте число, $p>3$, то p^2-1 ділиться на 12.

5. Знайдіть кількість дільників числа 2700.
6. Доведіть, що в ряду натуральних чисел існують 2003 складених чисел, які йдуть поспіль.

Варіант 2

1. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 1020 і 1224.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному n дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний.
3. Відомо, що числа p, $p+10$, $p+20$ — прості. Знайдіть p.
4. Доведіть, що якщо p, q — прості числа, $p>3$, $q>3$, то p^2-q^2 ділиться на 24.
5. Знайдіть кількість дільників числа 3600.
6. Доведіть, що в ряду натуральних чисел існують 2008 складених чисел, які йдуть поспіль.

9. Конгруенції за модулем. Мала теорема Ферма*

Означення. Якщо два числа a і b при діленні на m мають однакові остачі, то говорять, що a і b конгруентні за модулем m.

Позначення: $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ або $a\overset{m}{\equiv}b$.

Теорема 1 (критерій конгруентності)

Два числа конгруентні за модулем m, тоді й тільки тоді, коли різниця $a-b$ ділиться на m, тобто

$$\left(a\overset{m}{\equiv}b\right)\Leftrightarrow(a-b)\vdots m.$$

Доведення.

1) Нехай $a\overset{m}{\equiv}b$, тобто числа a і b мають однакові остачі при діленні на m. Тоді $a=mq+r$, $b=mq_1+r$, де q і q_1 — деякі цілі числа.

Розглянемо різницю $a-b=mq+r-(mq_1+r)=m(q-q_1)$, звідки випливає, що $(a-b)\vdots m$.

2) Навпаки, нехай $(a-b)\vdots m$. Тоді $a-b=mk$, де k — ціле число. Розділимо b на m з остачею: $b=mq+r$, де $0\le r<m$.

З рівності $a-b=mk$ виразимо a: $a=b+mk$. Оскільки $b=mq+r$, то $a=mq+r+mk=m(q+k)+r$, де $0\le r<m$.

* Ферма П'єр (1601–1665) — французький юрист і математик.

Отже, число a має ту саму остачу при діленні на m, що і число b, тобто $a\overset{m}{\equiv}b$, що і треба було довести.

Теорема 2. Конгруенції можна додавати і віднімати почленно, тобто якщо $a\overset{m}{\equiv}b$ і $c\overset{m}{\equiv}d$, то $a+c\overset{m}{\equiv}b+d$; $a-c\overset{m}{\equiv}b-d$.

Доведення. Якщо $a\overset{m}{\equiv}b$, то $(a-b)\vdots m$, тобто $a-b=mk$ (1), де k — ціле число. Аналогічно $c-d=ml$ (2), де l — ціле число. Додамо (1) і (2), дістанемо: $(a-b)+(c-d)=m(k+l)$ або $(a+c)-(b+d)=m(k+l)$. Отже, $(a+c)-(b+d)$ ділиться та m, тобто $a+c\overset{m}{\equiv}b+d$.

Аналогічно доводиться, що $a-c\overset{m}{\equiv}b-d$.

Теорема 3. Конгруенції можна почленно перемножати, тобто, якщо $a\overset{m}{\equiv}b$ і $c\overset{m}{\equiv}d$, то $ac\overset{m}{\equiv}bd$.

Доведення. Якщо $a\overset{m}{\equiv}b$, то $a-b=mk$, де k — ціле число. Якщо $c\overset{m}{\equiv}d$, то $c-d=ml$, де l — ціле число.

Розглянемо

$$ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)=aml+dmk=m(al+dk).$$

Це означає, що різниця $ac-bd$ ділиться на m і $ac\overset{m}{\equiv}bd$, то і треба було довести.

Зауваження. Теореми 2 і 3 справедливі і для будь-якої скінченної кількості доданків або множників. Це можна довести за допомогою принципу математичної індукції.

Наслідок 1. Конгруенцію можна підносити до степеня, тобто, якщо $a\overset{m}{\equiv}b$ і n — натуральне число, то $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$.

Наслідок 2. Нехай $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо $a\overset{m}{\equiv}b$, то $P(a)\overset{m}{\equiv}P(b)$.

Приклад 1. Довести, що n^3-n ділиться на 6 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання. Ми вже знаємо, що при діленні на 6 можливі шість класів остач: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

1) $n\overset{6}{\equiv}0$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}0^3-0\overset{6}{\equiv}0$;
2) $n\overset{6}{\equiv}1$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}1^3-1\overset{6}{\equiv}0$;
3) $n\overset{6}{\equiv}2$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}2^3-2\overset{6}{\equiv}0$;

4) $n\overset{6}{\equiv}3$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}3^3-3\overset{6}{\equiv}24\overset{6}{\equiv}0$;

5) $n\overset{6}{\equiv}4$ або $n\overset{6}{\equiv}(-2)$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}(-2)^3-(-2)\overset{6}{\equiv}-6\overset{6}{\equiv}0$;

6) $n\overset{6}{\equiv}5$ або $n\overset{6}{\equiv}-1$, тоді $n^3-n\overset{6}{\equiv}(-1)^3-(-1)\overset{6}{\equiv}0$.

Отже, при будь-якому натуральному n $\left(n^3-n\right)\vdots 6$, що і треба було довести.

Приклад 2. Довести, що при будь-якому натуральному n число $12^{2n+1}+11^{n+2}$ ділиться на 133.

Розв'язання. Розглянемо кожний доданок окремо:

$$12^{2n+1}=12\cdot12^{2n}=12\cdot144^{n};\ 144\overset{133}{\equiv}11,$$

отже $144^{n}\overset{133}{\equiv}11^{n}$ і $144^{2n+1}\overset{133}{\equiv}12\cdot11^{n}$ (1).

$$11^{n+2}=11^{2}\cdot11^{n}=121\cdot11^{n};\ 121\overset{133}{\equiv}-12,$$

отже $121\cdot11^{n}\overset{133}{\equiv}-12\cdot11^{n}$ і $11^{n+2}\overset{133}{\equiv}-12\cdot11^{n}$ (2).

Додамо (1) і (2), дістанемо: $12^{2n+1}+11^{n+2}\overset{133}{\equiv}12\cdot11^{n}-12\cdot11^{n}\overset{133}{\equiv}0$, звідки випливає, що $\left(12^{2n+1}+11^{n+2}\right)\vdots133$ при всіх натуральних n, що і треба було довести.

Приклад 3. Знайти остачу від ділення числа 222^{555} на 7.

Розв'язання. Оскільки $222=7\cdot31+5$, то $222\overset{7}{\equiv}5$ і $222^{555}\overset{7}{\equiv}5^{555}$.

Тепер подивимось, як повторюються остачі від ділення степенів числа 5 на 7:

$$5^1\overset{7}{\equiv}5;\ 5^2\overset{7}{\equiv}4;\ 5^3\overset{7}{\equiv}6;\ 5^4\overset{7}{\equiv}2;\ 5^5\overset{7}{\equiv}3;\ 5^6\overset{7}{\equiv}1.$$

Цикл замкнувся. Можна стверджувати, що для будь-якого натурального k:

$$5^{6k}\overset{7}{\equiv}1;\ 5^{6k+1}\overset{7}{\equiv}5;\ 5^{6k+2}\overset{7}{\equiv}4;\ 5^{6k+3}\overset{7}{\equiv}6;\ 5^{6k+4}\overset{7}{\equiv}2;\ 5^{6k+5}\overset{7}{\equiv}3.$$

Тепер з'ясуємо, чому дорівнює остача при діленні числа 555 на 6. Оскільки $555=6\cdot92+3$, тому $5^{555}=5^{6\cdot92+3}\overset{7}{\equiv}6$.

Відповідь. 6.

Приклад 4. Чи ділиться число $222^{555}+555^{222}$ на 7?

Розв'язання. Ми вже знаємо, що $222^{555}\overset{7}{\equiv}6$ (1).

Розглянемо 555^{222}.

$555\overset{7}{\equiv}2$ (оскільки $555=7\cdot79+2$), отже $555^{222}\overset{7}{\equiv}2^{222}$. Дослідимо остачі від ділення степенів числа 2 на 7:

$$2^1\overset{7}{\equiv}2;\ 2^2\overset{7}{\equiv}4;\ 2^3\overset{7}{\equiv}1.$$

Цикл замкнувся. Отже, для будь-якого натурального k маємо:

$$2^{3k}\overset{7}{\equiv}1;\ 2^{3k+1}\overset{7}{\equiv}2;\ 2^{3k+2}\overset{7}{\equiv}4.$$

Розглянемо число 222. Воно ділиться на 3: $222=3\cdot74$, отже, $2^{222}\overset{7}{\equiv}1$ і $555^{222}\overset{7}{\equiv}1$ (2).

Додаючи (1) і (2), дістанемо: $222^{555}+555^{222}\overset{7}{\equiv}6+1\overset{7}{\equiv}7\overset{7}{\equiv}0$. Це означає, що число $222^{555}+555^{222}$ ділиться на 7.

Відповідь. $\left(222^{555}+555^{222}\right)\vdots7$.

Приклад 5. Якою цифрою закінчується число 777^{777}?

Розв'язання. Для того, щоб дізнатися, якою цифрою закінчується число, треба знайти остачу від ділення цього числа на 10. $777\overset{10}{\equiv}7$, отже $777^{777}\overset{10}{\equiv}7^{777}$.

Досліджуючи остачі від ділення степенів числа 7 на 10, дістанемо:

$$7^1\overset{10}{\equiv}7;\ 7^2\overset{10}{\equiv}9;\ 7^3\overset{10}{\equiv}3;\ 7^4\overset{10}{\equiv}1.$$

Цикл замкнувся, отже, для будь-якого натурального k маємо:

$$7^{4k}\overset{10}{\equiv}1;\ 7^{4k+1}\overset{10}{\equiv}7;\ 7^{4k+2}\overset{10}{\equiv}9;\ 7^{4k+3}\overset{10}{\equiv}3.$$

Знайдемо остачу від ділення числа 777 на 4: $777=4\cdot194+1$, отже, $777^{777}\overset{10}{\equiv}7^{4\cdot194+1}\overset{10}{\equiv}7$ і $777^{777}\overset{10}{\equiv}7$.

Відповідь. Число 777^{777} закінчується цифрою 7.

Примітка. Подивимось, як зміниться відповідь, якщо запитання сформулювати так: «Якою цифрою закінчується число 777^{2008}?»

Очевидно, що зміни стосуються тільки кінцевої частини міркувань: треба було б шукати остачу від ділення числа 2008 на 4.

$2008=4\cdot502+0$. Тоді $7^{2008}\overset{10}{\equiv}1$ і $777^{2008}\overset{10}{\equiv}1$.

Отже, число 777^{2008} закінчується цифрою 1.

Приклад 6. Якою цифрою закінчується число $2008^{2007^{2006}}$?

Розв'язання. $2008\overset{10}{\equiv}8$, тому $2008^{2007^{2006}}\overset{10}{\equiv}8^{2007^{2006}}$.

Дослідимо остачі від ділення степенів числа 8 на 10:

$$8^1 \overset{10}{\equiv} 8;\ 8^2 \overset{10}{\equiv} 4;\ 8^3 \overset{10}{\equiv} 2;\ 8^4 \overset{10}{\equiv} 6;\ 8^5 \overset{10}{\equiv} 8.$$

Цикл замкнувся, тому для будь-якого натурального k маємо:

$$8^{4k} \overset{10}{\equiv} 6;\ 8^{4k+1} \overset{10}{\equiv} 8;\ 8^{4k+2} \overset{10}{\equiv} 4;\ 8^{4k+3} \overset{10}{\equiv} 2.$$

Тепер треба з'ясувати, чому дорівнює остача від ділення числа 2007^{2006} на 4. $2007 \overset{4}{\equiv} 3$, тому $2007^{2006} \overset{4}{\equiv} 3^{2006}$.

При діленні степенів числа 3 на 4 маємо:

$$3^1 \overset{4}{\equiv} 3;\ 3^2 \overset{4}{\equiv} 1;\ 3^3 \overset{4}{\equiv} 3.$$

Отже, для будь-якого натурального k $3^{2k} \overset{4}{\equiv} 1$. Таким чином, $3^{2006} \overset{4}{\equiv} 1$ і $2007^{2006} \overset{4}{\equiv} 1$. Тепер $8^{2007^{2006}} \overset{10}{\equiv} 8$ і $2008^{2007^{2006}} \overset{4}{\equiv} 8$.

Відповідь. Число $2008^{2007^{2006}}$ закінчується цифрою 8.

Теорема 3. (Мала теорема Ферма)

Доведіть, що при будь-якому натуральному числі n і простому p $n^p - n$ ділиться на p.

Доведення. 1) Нехай n ділиться на p. Тоді $n^p - n = n\left(n^{p-1} - 1\right)$ також ділиться на p, що і треба було довести.

2) Якщо n не ділиться на p, то доведемо, що $n^{p-1} - 1$ ділиться на p, тобто $n^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.

Ми знаємо, що при діленні на p можливі остачі 0, 1, 2, …, $p-1$. Остачу 0 ми виключаємо, бо цей випадок уже розглянуто.

Розглянемо такі конгруенції.

$$n \overset{p}{\equiv} r_1;\ 2\cdot n \overset{p}{\equiv} r_2;\ 3\cdot n \overset{p}{\equiv} r_3;\ \ldots\ (p-1)\cdot n \overset{p}{\equiv} r_{p-1},$$

де для будь-якого k $(1 \le k \le p-1)$ $0 < r_k \le p-1$.

Доведемо, що $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ — попарно різні числа.

Тоді множина $\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}\right\}$ співпадає з множиною $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, тобто числа $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ відрізняються від набору чисел 1, 2, …, $p-2$ тільки порядком розташування.

Дійсно, якщо існують такі k і l $(k \ne l)$, що $kn \overset{p}{\equiv} r_k$, $ln \overset{p}{\equiv} r_l$ і $r_k = l_l$, то $(kn - ln) = (k-l)n \overset{p}{\equiv} 0$.

Але $k-l$ не ділиться на p, оскільки $1 \le k \le p-1$ і $1 \le l \le p-1$. Тому $(k-l)n$ не може ділитися на p. Здобута суперечність доводить, що $k \ne l$ $r_k \ne r_l$.

Перемножимо розглянуті вище конгруенції.

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1)\cdot n^{p-1} \overset{p}{\equiv} r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_{p-1}.$$

Добуток $r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_{p-1} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1) = (p-1)!$

Таким чином, $(p-1)!\,n^{p-1} \overset{p}{\equiv} (p-1)!$, звідки випливає, що $n^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$, що і треба було довести.

Приклад 7. Довести, що $n^7 - n$ ділиться на 42 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання. Число $n^7 - n$ ділиться на 7 (мала теорема Ферма). З іншого боку

$$n^7 - n = n\left(n^6 - 1\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^4 + n^2 + 1\right) =$$
$$= (n-1)\cdot n\cdot(n+1)\left(n^4 + n^2 + 1\right).$$

Добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться і на 2, і на 3, тому ділиться на 6 (приклад 3, п. 4).

Числа 6 і 7 взаємно прості, тому $n^7 - n$ ділиться на їхній добуток, тобто $\left(n^7 - n\right) \vdots 42$, що і треба було довести.

Завдання для самостійного розв'язування

4.100. При яких n число $n^2 - 1$ ділиться на 3?

4.101. Доведіть, що якщо числа a і b не діляться на 3, але конгруентні за модулем 3, то число $ab - 1$ ділиться на 3. Чи правильне обернене твердження?

4.102. Доведіть, що при будь-яких цілих числах a і b число $ab\left(a^4 - b^4\right)$ ділиться на 5.

4.103. Доведіть, що при будь-якому цілому числі n число $n^2\left(n^2 - 1\right)$ ділиться на 4.

4.104. Доведіть, що при жодному натуральному n число $3n - 1$ не є точним квадратом.

4.105. Знайдіть остачу від ділення числа 6^{582} на 11.

4.106. Знайдіть остачу від ділення числа $7^{100} + 11^{100}$ на 13.

4.107. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

4.108. Якою цифрою закінчується число $27^{27^{27}}$?

4.109. Чи ділиться число $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$ на 10?

4.110. Доведіть, що число $11^{10} - 1$ ділиться на 100.

4.111. Доведіть, що число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ ділиться на 7.

4.112. Знайдіть остачу від ділення на 7 числа:
а) 2^{135}; б) 2003^{1991}; в) $143^{23} - 16 \cdot 24^{30}$; г) $13^{14} - 18^{13}$.

4.113. Знайдіть остачу від ділення на 5 числа:
а) 2^{149}; б) 2003^{1991}; в) $74^{25} - 9 \cdot 36^{84}$; г) $13^{14} - 19^{19}$.

Робота для самоперевірки

1. Якою цифрою закінчується число: а) 2^{2007}; б) 3^{2007}; в) 7^{2007}?
2. Знайдіть остачу від ділення числа $5^{100} + 7^{100}$ на 11.
3. Доведіть, що $4^{2003} - 4^{1991}$ ділиться на 10.
4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $7 \cdot 5^n + 12 \cdot 6^n$ ділиться на 19.

Варіант 2

1. Якою цифрою закінчується число: а) 3^{2008}; б) 4^{2008}; в) 7^{2008}?
2. Знайдіть остачу від ділення числа $\left(3^{20} + 11\right)^{55}$ на 13.
3. Доведіть, що $2^{70} + 3^{70}$ ділиться на 13.
4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ ділиться на 57.

10. Ознаки подільності на 3, 9, 11, 7

Теорема 1. Для того, щоб число ділилося на 3, необхідно і достатньо, щоб сума цифр цього числа ділилася на 3.

Доведення. Зазначимо, що:

$$10^1 \overset{3}{\equiv} 1;\ 10^2 \overset{3}{\equiv} 1;\ \ldots\ 10^n \overset{3}{\equiv} 1.$$

Розглянемо ціле число (нехай воно буде шестицифровим):

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \overset{3}{\equiv} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1 + e \cdot 1 + f,$$

тобто $\overline{abcdef} \overset{3}{\equiv} a + b + c + d + e + f$.

Ми довели, що натуральне число при діленні на 3 має таку ж саму остачу, що і сума його цифр. Теорему доведено.

Теорема 2. Для того, щоб число ділилося на 9, необхідно і достатньо, щоб сума цифр цього числа ділилася на 9.

Доведення. Оскільки $10^1 \overset{9}{\equiv} 1;\ 10^2 \overset{9}{\equiv} 1;\ \ldots\ 10^n \overset{9}{\equiv} 1$, то

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \overset{9}{\equiv}$$
$$\overset{9}{\equiv} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1 + e \cdot 1 + f.$$

Отже, $\overline{abcdef} \overset{9}{\equiv} a + b + c + d + e + f$, тобто натуральне число ділиться на 9, тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 9. Теорему доведено.

Розглянемо ознаку подільності на 11.

Теорема 3. Для того, щоб число ділилося на 11, необхідно і достатньо, щоб різниця суми його цифр, що стоять на непарних місцях, і суми його цифр, що стоять на парних місцях, ділилась на 11.

Доведення

$$10^1 \overset{11}{\equiv} -1;\ 10^2 \overset{11}{\equiv} 1;\ 10^3 \overset{11}{\equiv} -1;\ \ldots\ 10^4 \overset{11}{\equiv} 1;\ 10^5 \overset{11}{\equiv} -1.$$

Тоді

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \overset{11}{\equiv}$$
$$\overset{11}{\equiv} a \cdot (-1) + b \cdot 1 + c \cdot (-1) + d \cdot 1 + e \cdot (-1) + f \overset{11}{\equiv} (b + d + f) - (a + c + e).$$

Звідси випливає ознака подільності на 11. Теорему доведено.

В такий же спосіб можна дістати ознаку подільності на 7.

Запишемо співвідношення:

$$10^1 \overset{7}{\equiv} 3;\ 10^2 \overset{7}{\equiv} 2;\ 10^3 \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} -1;\ 10^4 \overset{7}{\equiv} 4 \overset{7}{\equiv} -3;\ 10^5 \overset{7}{\equiv} -2;\ 10^6 \overset{7}{\equiv} 1.$$

Цикл замкнувся.

Розглянемо два рядка чисел, в першому з яких — степені числа 10, а в другому — під кожним степенем числа 10 записане число конгруентне з ним за модулем 7:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots & 10^{10} & 10^9 & 10^8 & 10^7 & 10^6 & 10^5 & 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10 & 1 \\ \ldots & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Тоді

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \overset{7}{\equiv}$$
$$\overset{7}{\equiv} a \cdot (-2) + b \cdot (-3) + c \cdot (-1) + d \cdot 2 + e \cdot 3 + f.$$

Теорема 4. Для того, щоб знайти остачу від ділення натурального числа на 7, необхідно справа наліво підписати під цифрами цього числа коефіцієнти: ...–1, 2, 3, 1, –2, –3, –1, 2, 3, 1. Потім помножити кожну цифру на відповідний коефіцієнт і знайти суму цих добутків; здобута сума при діленні на 7 матиме ту саму остачу, що і задане число.

Приклад 1. Знайти остачу від ділення числа 4136 на 7.

Розв'язання. Скористаємось теоремою 4:

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Розглянемо суму: $4\cdot(-1)+1\cdot 2+3\cdot 3+6\cdot 1=13\overset{7}{\equiv}6.$

Відповідь. 6.

Приклад 2. З'ясувати, чи ділиться число 8546216 на 7.

Розв'язання. Згідно з теоремою 4:

$$\begin{matrix} 8 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Розглянемо суму:

$$8\cdot 1+5\cdot(-2)+4\cdot(-3)+6\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 3+6\cdot 1=$$

$$=8-10-12-6+4+3+6=-7\overset{7}{\equiv}0.$$

Відповідь. Число 8546216 ділиться на 7.

Інколи для того, щоб знайти відповідну ознаку подільності, зручно розбити число на групи цифр.

Для виводу ще однієї ознаки подільності на 11 скористаємось тим, що $100\overset{11}{\equiv}1$; $100^2\overset{11}{\equiv}1$; $100^3\overset{11}{\equiv}1$ і так далі.

Отже, для числа $\overline{abcdef}$ справедливі твердження:

$$\overline{ab}\cdot 100^2\overset{11}{\equiv}\overline{ab};\ \overline{cd}\cdot 100\overset{11}{\equiv}\overline{cd};\ \overline{ef}\overset{11}{\equiv}\overline{ef};\ \overline{abcdef}\overset{11}{\equiv}\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}.$$

Теорема 5. Для того, щоб знайти остачу від ділення натурального числа на 11, необхідно цифри числа розбити на групи (починаючи праворуч) по дві цифри в кожній; сума здобутих двоцифрових чисел матиме ту саму остачу від ділення на 11, що і задане число.

Приклад 3. Знайти остачу від ділення числа 268513 на 11.

Розв'язання

$$268513\overset{11}{\equiv}26+85+13\overset{11}{\equiv}124\overset{11}{\equiv}1+24\overset{11}{\equiv}25\overset{11}{\equiv}3.$$

Відповідь. 3.

Приклад 4. З'ясувати, чи ділиться число 3785485 на 11.

Розв'язання

$$3785485\overset{11}{\equiv}3+78+54+85\overset{11}{\equiv}220\overset{11}{\equiv}2+20\overset{11}{\equiv}22\overset{11}{\equiv}0.$$

Відповідь. Число 3785485 ділиться на 11.

Ознаки, що пов'язані з розбиттям числа на групи цифр, називаються позиційними.

Розглянемо позиційну ознаку подільності на 7.

Зазначимо, що $1000\overset{7}{\equiv}-1$; $1000^2\overset{7}{\equiv}1$; $1000^3\overset{7}{\equiv}-1$ і т. д.

отже, число треба розбивати на групи по три цифри в кожній.

Теорема 6. Для того, щоб знайти остачу від ділення натурального числа 7 необхідно:

1) цифри числа розбити на групи (починаючи праворуч) по три цифри в кожній;
2) знайти суму S_1 трицифрових чисел, які стоять на непарних місцях;
3) знайти суму S_2 трицифрових чисел, які стоять на парних місцях;
4) знайти різницю S_1-S_2.

Здобута різниця матиме ту саму остачу від ділення на 7, що і задане число.

Приклад 5. З'ясувати, чи ділиться число 5385489 на 7.

Розв'язання

1) 5 385 489;
2) $S_1=5+489=494$;
3) $S_2=385$;
4) $S_1-S_2=109$.

Тоді $109\overset{7}{\equiv}4$.

Або $5385489\overset{7}{\equiv}(5+489)-385\overset{7}{\equiv}109\overset{7}{\equiv}4.$

Відповідь. Не ділиться. Число 5385489 від ділення на 7 має остачу 4.

Приклад 6. Довести, що число 8546216 ділиться на 7.

Розв'язання

$$8546216\overset{7}{\equiv}(8+216)-546\overset{7}{\equiv}-322\overset{7}{\equiv}0.$$

Отже, при діленні числа 8546216 на 7 остача дорівнює 0, тобто число 8546216 ділиться на 7, що і треба було довести.

Завдання для самостійного розв'язування

4.114. У числі 4758967* напишіть замість зірочки таку цифру, щоб здобуте число ділилося на:

а) 2; б) 5; в) 3; г) 9; д) 4; е) 7; ж) 11.

4.115. Доведіть, що число $49^{100}-14^{50}$ кратне 5.

4.116. Доведіть, що задані числа є складеними:

а) $\underbrace{55...53}_{2004 \text{ цифри}}$; б) $1000^{1000}-1$.

4.117. Використовуючи той факт, що $1001=7\cdot 11\cdot 13$, доведіть позиційні ознаки подільності на 11 і на 13 (аналогічно до теореми 6).

4.118. Чи ділиться число a на 11? на 13?

а) $a=3785485$; б) $a=8546216$.

4.119. Знайдіть остачу від ділення числа 53012869745013811 на:

а) 7; б) 11; в) 13.

§ 2. РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ

Існують задачі, які потребують відповіді в цілих числах. Розв'язування рівнянь у цілих числах є однією з найстародавніших математичних задач. Найбільшого розквіту цей розділ математики досягнув у Стародавній Греції. Основним джерелом, яке дійшло до нашого часу є «Арифметика» Діофанта*.

І хоча він розглядав невизначені рівняння і системи рівнянь (тобто такі, в яких змінних більше, ніж рівнянь) тільки 2 і 3 степеня, всі невизначені рівняння і системи рівнянь називаються діофантовими.

Приклад 1. Чи можливо десятьма монетами по 2, 5 і 50 к. скласти суму в 1 гривню?

Розв'язання. Нехай є x монет по 2 к., y монет по 5 к. і z монет по 50 к. Складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=10, \\ 2x+5y+50z=100. \end{cases}$

Виключимо з цієї системи рівнянь змінну x, дістанемо: $3y+48z=80$. Ліва частина цього рівняння ділиться на 3, а права — не ділиться на 3. Тому при жодних цілих y і z така рівність не можлива.

Відповідь. Не можливо.

* Діофант (імовірно III ст.) — давньогрецький математик.

Як бачимо, рівняння $3y+48z=80$ виявилося таким, яке неможливо розв'язати в цілих числах.

Найпростіше діофантове рівняння вже було нами розглянуто і п. 4.

Теорема 1. Рівняння $ax+by=1$, де a і b — взаємно прості числа, завжди має розв'язки і до того ж їх безліч.

Доведення. 1) Існування розв'язків випливає із теореми 1 п. 4. Дійсно, якщо a і b — взаємно прості числа, то існують такі цілі числа x_0 і y_0, що $ax_0+by_0=1$ (*).

2) Розглянемо пару чисел $(x;y)$, де $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$ (n — будь-яке ціле число) і доведемо, що вона є розв'язком рівняння $ax+by=1$.

Розглянемо

$$ax+by=a(x_0+bn)+b(y_0-an)=ax_0+abn+by_0-abn=ax_0+by_0=1$$

(згідно з (*)).

Отже, для будь-якого цілого числа n пара чисел $(x_0+bn;y_0-an)$ є розв'язком рівняння $ax+by=1$, тобто дане рівняння має безліч розв'язків. Теорему доведено.

Приклад 2. У покупця і продавця є монети вартістю тільки по a к. і b к. Покупець повинен заплатити c к. В якому випадку він зможе це зробити?

Задача матиме розв'язки, якщо знайдуться такі цілі числа x і y, що $ax+by=c$.

Таким чином, ми підійшли до діофантова рівняння виду $ax+by=c$.

Теорема 2. Рівняння $ax+by=c$, де a, b, c — задані цілі числа, має цілі розв'язки тоді й тільки тоді, коли c ділиться на найбільший спільний дільник чисел a і b.

Доведення випливає із теореми 1 п. 4.

Наслідок 1. Якщо c не ділиться на НСД $(a;b)$, то рівняння $ax+by=c$ не має цілих розв'язків (див. приклад 1).

Наслідок 2. Якщо a і b — взаємно прості числа, то рівняння $ax+by=c$ завжди має цілі розв'язки.

Повернемось до прикладу 2.

Розв'язання. Покупець зможе заплатити суму c к. монетами тільки по a к. і b к. тільки в тому випадку, якщо c ділиться на НСД $(a;b)$.

Відповідь. Якщо $c \vdots$ НСД $(a;b)$.

Приклад 3. Розв'язати в цілих числах рівняння $3x+2y=7$.

Розв'язання. За наслідком 2 це рівняння має цілі розв'язки. Перепишемо його у вигляді: $2(x+y)=7-x$. Тоді зрозуміло, що $7-x$ ділиться на 2, тобто $7-x=2n$, де n — ціле число.

Тоді $x=7-2n$; $y=\frac{1}{2}(7-3x)=\frac{1}{2}(7-21+6n)=-7+3n$.

Отже, пара чисел $(7-2n;-7+3n)$ при кожному цілому n є розв'язком даного рівняння.

Відповідь. $(7-2n;-7+3n)$, $n\in Z$.

Іншим прикладом діофантова рівняння є рівняння $x^2+y^2=a^2$, яке згадувалося в «Арифметиці» Діофанта (як задача № 8).

Згодом це рівняння стало причиною появи Великої теореми Ферма про неможливість розв'язання в цілих і раціональних числах рівняння $x^n+y^n=z^n$, де $n\in Z$ і $n\geq 3$.

На відміну від рівняння $x^n+y^n=z^n$, де $n\in Z$ і $n\geq 3$, рівняння $x^2+y^2=z^2$ має цілі розв'язки. Додатними цілими розв'язками рівняння $x^2+y^2=z^2$ є довжини катетів (x і y) і гіпотенузи (z) прямокутного трикутника. Такі числа називають піфагоровими трійками.

Всі трійки піфагорових чисел можна дістати за формулами: $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$, де m і n — цілі взаємно прості числа і $m>n>0$.

Розглянемо приклади розв'язування нелінійних діофантових рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2-y^2=2009$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y)=2009$.

Розкладемо число 2009 на множники: $2009=7^2\cdot 41$.

Оскільки число 2009 можна подати у вигляді добутку двох цілих множників, таким чином:

$$2009=1\cdot 2009=(-1)(-2009)=7\cdot 287=(-7)\cdot(-287)=49\cdot 41=(-49)\cdot(-41),$$

то дістанемо $6\cdot 2=12$ систем рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2009; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2009, \\ x+y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=-2009; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=-2009, \\ x+y=-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y=7, \\ x+y=287; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-y=287, \\ x+y=7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y=-7, \\ x+y=-287; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-y=-287, \\ x+y=-7; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-y=49, \\ x+y=41; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x-y=41, \\ x+y=49; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x-y=-49, \\ x+y=-41; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x-y=-41, \\ x+y=-49. \end{cases}$

Розв'язавши кожну із систем (пам'ятаємо, що розв'язки повинні бути цілими), дістанемо відповідь.

Відповідь. (1005; 1004), (1005; –1004), (–1005; –1004), (–1005; 1004), (147; 140); (147; –140), (–147; –140), (–147; 140), (45; –4), (45; 4), (–45; 4), (–45; –4).

Приклад 5. Знайти всі пари цілих чисел, для яких сума дорівнює добутку цих чисел.

Розв'язання. Нехай x і y — шукані цілі числа, тоді $x+y=xy$. Запишемо це рівняння у вигляді $xy-x-y+1=1$ і розкладемо ліву частину рівняння на множники: $(x-1)(y-1)=1$. Дістанемо системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь. (2; 2); (0; 0).

Приклад 6. Знайти натуральні розв'язки рівняння $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$.

Розв'язання. За умовою y і z — натуральні числа, отже, $y\geq 1$, $z\geq 1$. Тоді $\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}$ — правильний дріб і x — ціла частина, а $\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}$ — дробова частина лівої частини рівняння. Перетворимо дріб $\frac{10}{7}$, виділивши цілу і дробову частину: $\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}=1+\frac{3}{7}$. Звідси

$$x=1;\ \cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{3}{7};\ y+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}.$$

Тепер y — ціла частина, а $\frac{1}{z}$ — дробова частина. Враховуючи, що

$$\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3},$$

маємо: $y=2$; $z=3$.

Відповідь. (1; 2; 3).

Приклад 7. Знайти натуральні розв'язки рівняння $x+y+z=xyz$.

Розв'язання. Нехай $x\le y\le z$, тоді $xyz=x+y+z\le 3z$, отже, $xy\le 3$. Але $x^2\le xy$, тобто $x^2\le 3$, звідки $x=1$. Враховуючи, що $xy\le 3$ і $x=1$, маємо, $y\le 3$. Можливі такі випадки:

1) $y=1$. Тоді початкове рівняння набуває вигляду $2+z=z$, що неможливо.
2) $y=2$. Тоді $3+z=2z$, звідки $z=3$.
3) $y=3$. Тоді $4+z=3z$, звідки $z=2$, що суперечить умові $y\le z$.

Отже, $y=2$, $z=3$. Маємо розв'язок рівняння (1; 2; 3). Оскільки початкове рівняння є симетричним (таким, що не міняється при заміні x на y, y на z, z на x), то будь-яка перестановка трійки чисел (1; 2; 3) також є розв'язком цього рівняння.

Відповідь. (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

Завдання для самостійного розв'язування

4.120. Нехай a і b — взаємно прості натуральні числа. Доведіть, що рівняння $ax+by=ab$ не має розв'язків у натуральних числах.

4.121. Знайдіть цілі розв'язки рівняння:
а) $3y=2x+8$; б) $6x+8y=7$; в) $6x-8y=1$.

4.122. Двоцифрове число в шість разів більше від суми його цифр. Знайдіть це число.

4.123. Доведіть, що не існує двоцифрового числа, яке б дорівнювало добутку цифр, з яких складається його десятковий запис.

4.124. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
а) $(x-2)(xy+4)=1$; б) $y-x-xy=2$; в) $2x^2+xy=x+7$;
г) $3xy+2x+3y=0$; д) $x^2-xy-2y^2=1$; е) $x^2+xy-2y^2-x+y=3$.

4.125. Доведіть, що рівняння не має розв'язків у цілих числах:
а) $x^2-3y=17$; б) $3x^2-4y^2=13$.

4.126. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:
а) $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$; б) $x!+y!=4z+3$; в) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

4.127. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
а) $6x^2+5y^2=74$; б) $19x^2+91y^2=1991$.

4.128. Розв'яжіть у простих числах рівняння:
а) $x^2-4y^2=9$; б) $x^y+1=z$.

4.129. Чи можливо з двадцяти монет вартістю 5, 20, 50 центів скласти суму в 5 доларів?

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння в цілих числах:
а) $27x+42y=2003$; б) $2x+3y=8$; в) $4x+y+2xy=0$.
2. Доведіть, що рівняння $x^2-3y=17$ не має розв'язків у цілих числах.

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння в цілих числах:
а) $257x+18y=175$; б) $5x+8y=29$; в) $y-x-xy=2$.
2. Доведіть, що рівняння $3x^2-4y^2=13$ не має розв'язків у цілих числах.

§ 3. ПОДІЛЬНІСТЬ МНОГОЧЛЕНІВ

Ми вже знаємо, що над многочленами, така само, як і над цілими числами можна виконувати арифметичні дії. В цьому многочлени схожі з цілими числами. Сума, різниця, добуток будь-яких многочленів є многочленом. Ділення многочленів можливе у тому випадку, коли степінь многочлена-діленого вищий або дорівнює степеню многочлена-дільника. Розглянемо алгоритми ділення многочленів. За аналогією із діленням багатоцифрових чисел, ділення многочленів часто виконуємо «куточком».

Приклад 1. Поділити $8a^3+8a-b^3-4b+3$ на $2a-b$.

Розв'язання. Виконаємо ділення «куточком».

$$\begin{array}{l|l}
-\,8a^3+8a-b^3-4b+3 & 2a-b \\
\underline{\;\;8a^3-4a^2b} & 4a^2+2ab+b^2+4 \\
\qquad -\,4a^2b+8a-b^3-4b+3 & \\
\qquad \underline{\;\;4a^2b-2ab^2} & \\
\qquad\qquad -\,2a\left(b^2+4\right)-b^3-4b+3 & \\
\qquad\qquad \underline{\;\;2a\left(b^2+4\right)-b^3-4b} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3 &
\end{array}$$

У цьому випадку ділення виконане з остачею.

Відповідь. $8a^3+8a-b^3-4b=(2a-b)\left(4a^2+2ab+b^2+4\right)+3.$

Примітка. Надалі ми будемо розглядати многочлен з однією змінною.

Приклад 2. Поділити x^3-8 на $x-2$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$, маємо $\left(x^3-8\right):(x-2)=x^2+2x+4.$

Цей же результат ми дістанемо, якщо виконаємо ділення «куточком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x-8 & x-2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+4 \\ 2x^2+0x & \\ -\underline{2x^2-4x} & \\ 4x-8 & \\ -\underline{4x-8} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, у цьому випадку ділення виконане націло (тобто остача дорівнює 0).

Відповідь. $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right).$

Приклад 3. Поділити $16x^5+28x^4+24x^3+12x+4$ на $2x^3+x^2+3$.

Розв'язання. Виконаємо ділення «куточком».

$$\begin{array}{r|l} 16x^5+28x^4+24x^3+0x^2+12x+4 & 2x^3+x^2+0x+3 \\ \cline{2-2} -\underline{16x^5+\ 8x^4+\ 0x^3+24x^2} & 8x^2+10x+7 \\ 20x^4+24x^3-24x^2+12x & \\ -\underline{20x^4+10x^3+\ 0x^2+30x} & \\ 14x^3-24x^2-18x+4 & \\ -\underline{14x^3+7x^2+\ 0x+21} & \\ -31x^2-18x-17 & \end{array}$$

Отже, процес ділення завершився, але здобуто остачу — многочлен другого степеня, який не можна поділити на многочлен третього степеня.

Відповідь. $16x^5+28x^4+24x^3+12x+4=$
$=\left(2x^3+x^2+3\right)\cdot\left(8x^2+10x+7\right)+\left(-31x^2-18x-17\right).$

Приклад 4. Знайти частку і остачу від ділення многочлена $P(x)=x^4+2x^3-2x^2-4x+1$ на многочлен $S(x)=x^2+3x+2$.

Розв'язання. Виконаємо ділення «куточком».

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-2x^2-4x+1 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4+3x^3+2x^2} & x^2-x-1 \\ -x^3-4x^2-4x & \\ -\underline{-x^3-3x^2-2x} & \\ -x^2-2x+1 & \\ -\underline{-x^2-3x-2} & \\ x+3 & \end{array}$$

Отже, ми дістали частку: x^2-x-1 і остачу: $x+3$. Зазначимо, що многочлен $x+3$, здобутий в остачі,— це многочлен першого степеня, а дільник x^2+3x+2 — многочлен другого степеня.

Відповідь. $P(x)=S(x)\cdot\left(x^2-x-1\right)+x+3.$

Таким чином, при діленні многочлена на многочлен дістаємо частку і остачу (як і у випадку цілих чисел), причому степінь остачі менший, ніж степінь дільника.

Теорема 1. Для будь-яких многочленів $P(x)$ і $S(x)$ $(S(x)\neq 0)$ існує, і до того ж тільки одна, пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$, яка задовольняє умови:

1) $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$;

2) або $Ст.\,R(x)<Ст.\,S(x)$, або $R(x)=0$.

Доведення. Існування такої пари многочленів випливає із алгоритма ділення «куточком».

Доведемо способом від супротивного, що така пара многочленів тільки одна. Нехай існує ще одна пара інших многочленів $Q_1(x)$ і $R_1(x)$ таких, що $P(x)=S(x)\cdot Q_1(x)+R_1(x)$ і $Ст.\,R_1(x)<Ст.\,S(x)$.

Прирівнявши різні вирази для $P(x)$, маємо:

$$S(x)\cdot Q(x)+R(x)=S(x)Q_1(x)+R_1(x).$$

Тоді $R(x)-R_1(x)=S(x)\left(Q_1(x)-Q(x)\right)$, що неможливо, оскільки

$$Ст.\left(R(x)-R_1(x)\right)<Ст.\,S(x)\leq Ст.\left(Q_1(x)-Q(x)\right).$$

Отже, $R(x)=R_1(x)$. Тоді і $Q(x)=Q_1(x)$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Приклад 5. Знайти остачу від ділення многочлена

$$P(x)=2x^3-3x^2+7x-1$$

на двочлен $x-1$.

Розв'язання. Виконати ділення «куточком».

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2+7x-1 & x-1 \\ \underline{2x^3-2x^2} \quad\quad\quad & 2x^2-x+6 \\ -x^2+7x-1 & \\ \underline{-x^2+x} \quad\ & \\ 6x-1 & \\ \underline{6x-6} & \\ 5 & \end{array}$$

Відповідь. 5.

У прикладі 5 остача від ділення многочленів є числом, тобто многочленом нульового степеня. Це не дивно, бо дільник — многочлен першого степеня.

Знайдемо значення многочлена $P(x)$ при $x=1$:

$$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2+7\cdot1-1=2-3+7-1=5.$$

Отже, $P(1)=5$ і $R=5$. Цей факт не є випадковим.

Теорема 2 (теорема Безу*). Остача від ділення будь-якого многочлена $P(x)$ на двочлен $(x-a)$ дорівнює $P(a)$.

Доведення. Оскільки дільник $x-a$ — це многочлен першого степеня, то остача — число. Тоді $P(x)=(x-a)Q(x)+R$.

При $x=a$ дістанемо $P(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R$, звідки $R=P(a)$, що і треба було довести.

Тепер ми можемо довести деякі твердження, які були сформульовані в п. 5.

Наслідок 1. При будь-якому натуральному n $\left(x^n-a^n\right)\vdots(x-a)$.

Доведення. $P(x)=x^n-a^n$, $S(x)=x-a$. За теоремою Безу остача від ділення $P(x)$ на $S(x)$ дорівнює $P(a)$, тобто $R=P(a)=a^n-a^n=0$. Це означає, що $P(x)$ ділиться на $S(x)$, що і треба було довести.

Наслідок 2. При будь-якому натуральному n $\left(x^{2n}-a^{2n}\right)\vdots(x+a)$.

Доведення аналогічне доведенню наслідка 3.

* Безу Етьєн (1730–1783) — французький математик.

Наслідок 3. При будь-якому натуральному n $\left(x^{2n+1}+a^{2n+1}\right)\vdots(x+a)$.

Доведення. $P(x)=x^{2n+1}+a^{2n+1}$; $S(x)=x+a=x-(-a)$. За теоремою Безу остача від ділення $P(x)$ на $S(x)$ дорівнює $P(-a)$:

$$P(-a)=(-a)^{2n+1}+a^{2n+1}=-a^{2n+1}+a^{2n+1}=0.$$

Отже, $P(x)$ ділиться на $S(x)$, що і треба було довести.

Для многочленів, так само, як і для цілих чисел, існує поняття найбільшого спільного дільника. Для знаходження НСД многочленів також можна застосувати алгоритм Евкліда.

Приклад 6. Знайти найбільший спільний дільник многочленів

$$P(x)=x^4+2x^3-2x^2-4x+1 \text{ і } S(x)=x^2+3x+2.$$

Розв'язання. Як було показано вище (див. приклад 4) при діленні $P(x)$ на $S(x)$ остача $R(x)=x+3$. За алгоритмом Евкліда НСД $\left(P(x);S(x)\right)=$ НСД $\left(S(x);R(x)\right)$.

Поділимо $S(x)$ на $R(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+2 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} \quad\ & x \\ 2 & \end{array}$$

Остача $R_1=2$ — константа, це означає, що многочлени $P(x)$ і $S(x)$ взаємно прості.

Відповідь. НСД $\left(P(x);S(x)\right)=2$.

Приклад 7. Знайти НСД $\left(P(x);S(x)\right)$, якщо

$$P(x)=6x^4-2x^3+5x^2-x+1;\ S(x)=6x^3-2x^2+3x-1.$$

Розв'язання. Поділимо $P(x)$ на $S(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4-2x^3+5x^2-x+1 & 6x^3-2x^2+3x+1 \\ \underline{6x^4-2x^3+3x^2-x} \quad\ & x \\ 2x^2 \quad\quad +1 & \end{array}$$

$R(x)=2x^2+1$. Отже, НСД $\left(P(x);S(x)\right)$ = НСД $\left(S(x);R(x)\right)$.

Поділимо $S(x)$ на $R(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3-2x^2+3x-1 & 2x^2+1 \\ \underline{6x^3+0x^2+3x} \quad\ & 3x-1 \\ -2x^2+0x-1 & \\ \underline{-2x^2+0x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Відповідь. НСД $\left(P(x); S(x)\right) = 2x^2 + 1.$

Завдання для самостійного розв'язування

4.130. Доведіть, що $\left(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 1\right) \vdots (x+1).$

4.131. Знайдіть остачу від ділення $P(x)$ на $S(x)$, якщо
а) $P(x) = 3x^6 + 2x^4 - 7,\ S(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^2 + x;$
б) $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 15x^2 + x - 10,\ S(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x - 5.$

4.132. При яких значеннях m многочлен $x^6 + x^3 + m$ ділиться на $x^3 + 2$?

4.133. При яких значеннях a і b многочлен $x^3 + 2x^2 + ax + b$ ділиться на $x^2 + x + ab$?

4.134. Знайдіть частку і остачу від ділення $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2$ на $S(x) = x - 3.$

4.135. Знайдіть остачу від ділення $P(x) = x^5 - 3x^2 + 7x + 2$ на

$$S(x) = x + 2.$$

4.136. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + ab$. Знайдіть значення a і b, якщо при діленні $P(x)$ на $(x-2)$ остача дорівнює 15, а на $(x+1)$ — остача дорівнює нулю.

4.137. При діленні многочлена $P(x)$ на $(x-3)$ остача дорівнює 5, а на $(x-1)$ — остача дорівнює 7. Чому дорівнює остача від ділення $P(x)$ на $(x-3)(x-1)$?

4.138. Доведіть, що многочлен $P(x) = (x-2)^{100} + (x-1)^{50} - 1$ ділиться на $S(x) = x^2 - 3x + 2.$

4.139. Знайдіть НСД $\left(P(x); S(x)\right)$, якщо
а) $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - x - 2,\ S(x) = x^2 + 3x + 2;$
б) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 20,\ S(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$

Робота для самоперевірки

Варіант 1

1. Знайдіть частку і остачу від ділення $P(x)$ на $S(x)$, якщо:
а) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2,\ S(x) = x + 4;$
б) $P(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x + 5,\ S(x) = x^2 + x - 2.$
2. За теоремою Безу знайдіть остачу від ділення $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$ на $x - 3.$

Варіант 2

1. Знайдіть частку і остачу від ділення $P(x)$ на $S(x)$, якщо:
а) $P(x) = x^4 + 5x^2 + 6,\ S(x) = x + 2;$
б) $P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 - 3,\ S(x) = 2x^2 - x + 2.$
2. За теоремою Безу знайдіть остачу від ділення $3x^3 - x^2 - 4x - 2$ на $x + 1.$

Контрольна робота з теми «Подільність чисел і многочленів»

Варіант 1

1. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ ділиться на 24.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \left(3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}\right) \vdots 19.$
3. Числа p і $8p^2 + 1$ прості. Чому дорівнює p?
4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n дріб $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ нескоротний.
5. Знайдіть частку та остачу від ділення $P(x)$ на $S(x)$, якщо $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12,\ S(x) = x - 2.$

Перевірте правильності здобутих результатів за допомогою теореми Безу.

Варіант 2

1. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ ділиться на 24.
2. Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \left(7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n\right) \vdots 19.$
3. Числа p, $4p^2 + 1$ і $6p^2 + 1$ — прості. Чому дорівнює p?
4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n дріб $\dfrac{16n+1}{24n+5}$ нескоротний.
5. Знайдіть частку та остачу від ділення $P(x)$ на $S(x)$, якщо $P(x) = x^4 + 5x + 6,\ S(x) = x + 2.$

Перевірте правильності здобутих результатів за допомогою теореми Безу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Школа* в «Кванте»: Арифметика и алгебра / Под ред. А. А. Егорова.— М.: Бюро «Квантум», 1994.— 128 с. (Прил. к журналу «Квант»)
2. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы.— Киров: АСА, 1994.— 272 с.
3. *Галицкий М. Л.* и др. Сборник задач по алгебре 8–9 классов: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич.— 3-е изд.— М., 1997.— 271 с.: ил.
4. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1989.— 252 с.: ил.