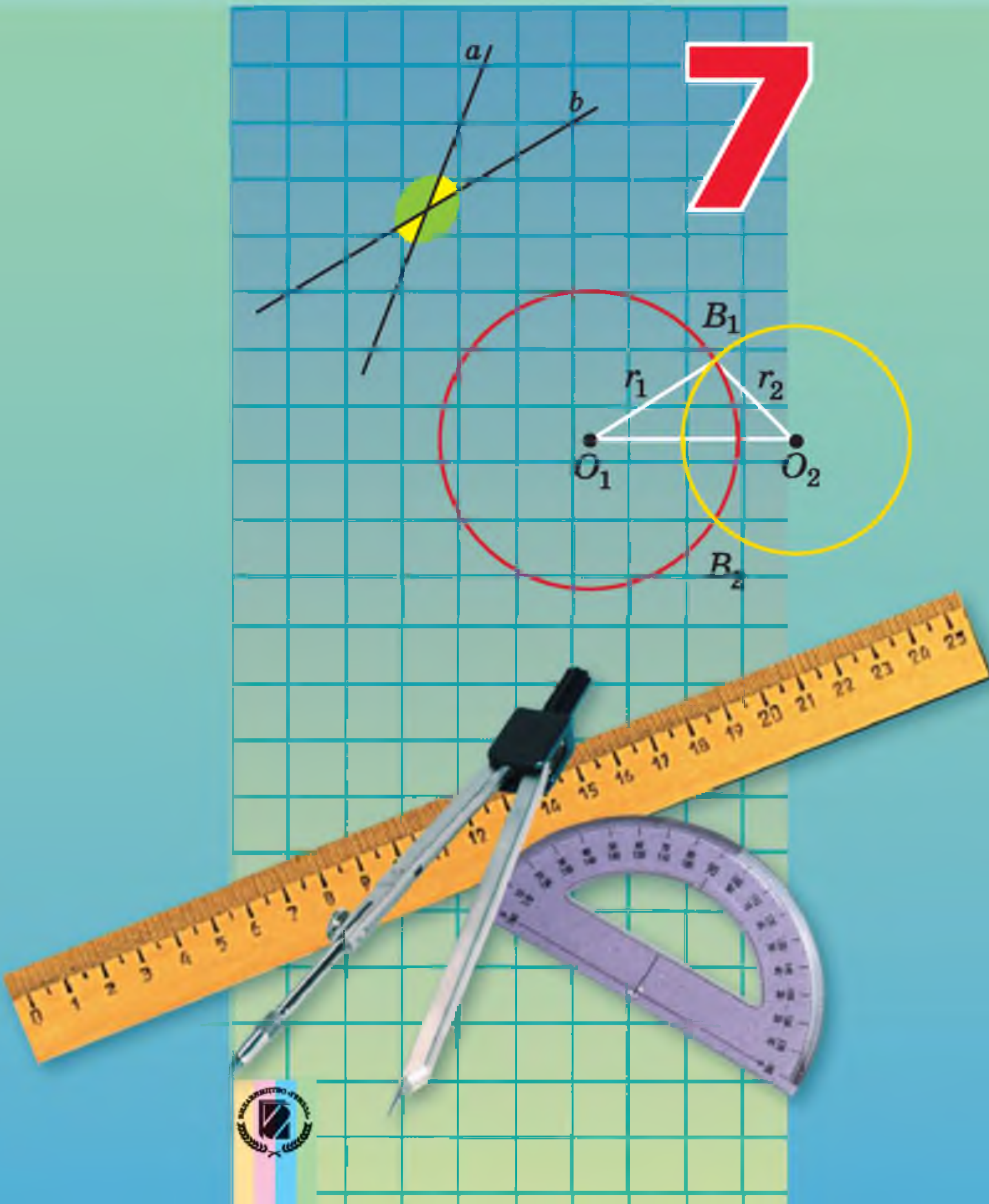
О.С. Істер

ГЕОМЕТРІЯ

7



УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ МОН України від 20.07.2015 № 777)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Істер О.С.
І-89 Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2015. — 184 с.

ISBN 978-966-11-0613-9.

Підручник відповідає чинній програмі з математики та містить достатню кількість диференційованих задач і вправ. Також після кожного розділу наводяться вправи для повторення. З метою підготовки до контрольної роботи передбачено «Домашню самостійну роботу» та «Завдання для перевірки знань». Наприкінці підручника наведено вправи підвищеної складності, предметний покажчик та відповіді до більшості вправ. Для найдопитливіших є низка цікавих і складних задач у рубриці «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0613-9

Юні друзі!

Ви починаєте вивчати один з найцікавіших предметів — **геометрію.** У перекладі з грецької слово *геометрія* означає *землемірство* (*гео* — земля, *метрео* — міряти). Ця назва пояснюється тим, що виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людини. Ще давні єгиптяни та греки близько трьох тисяч років тому вміли виконувати різні вимірювання, потрібні для розмічування ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово складалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

Пізніше завдяки давньогрецьким ученим Фалесу, Піфагору, Евкліду та іншим дедалі більшу роль у геометрії стали відігравати системи міркувань, які давали змогу доводити нові формули і факти на основі раніше відомих. На початок нашої ери геометрія вже сформувалася як наука, у якій властивості геометричних фігур вивчають шляхом міркувань.

Отже, геометрія виникла на основі життєдіяльності людини. Спочатку вона використовувалася суто практично, але згодом сформувалася як самостійна математична наука.

Оволодіти матеріалом курсу вам допоможе цей підручник. Він складається із чотирьох розділів, що містять 27 параграфів. Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

— означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

— запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

▲ — закінчення доведення теореми або задачі;

— «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;

— вправи для повторення;

— вправи підвищеної складності;

— рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв'язування у класі, а **синім** — для розв'язування вдома.

Усі вправи мають позначення залежно від рівня навчальних досягнень, якому вони відповідають.

З позначки **1** починаються вправи початкового рівня;

З позначки **2** починаються вправи середнього рівня;

З позначки **3** починаються вправи достатнього рівня;

З позначки **4** починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника — «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу» та «Задачі підвищеної складності». Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи; інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, та додатковий матеріал (§ 27) можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього вона повинна розв'язати вправи, що їй посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 7-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, які не розглянули під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Розділ 1 ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви:

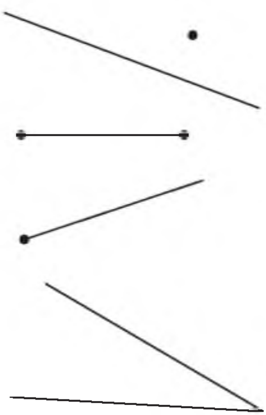
- **пригадаєте** елементарні геометричні фігури: точку, пряму, промінь, кут, відрізок;
- **дізнаєтеся** про основні властивості елементарних геометричних фігур;
- **навчитеся** розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками та кутами.

§ 1. *ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ*

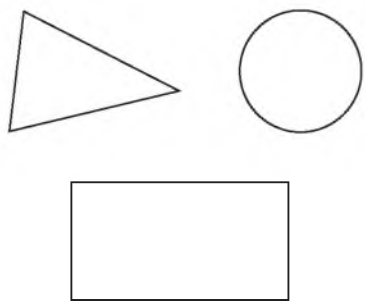
З уроків математики вам уже відомі деякі геометричні фігури: точка, пряма, відрізок, промінь, кут (мал. 1), трикутник, прямокутник, коло (мал. 2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з іншими важливими фігурами та їх властивостями.

Геометрія — це наука про властивості геометричних фігур.

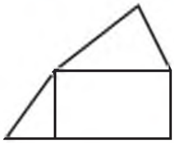
Найпростішою геометричною фігурою є *точка*. Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку — добре загостреним шматком крейди.



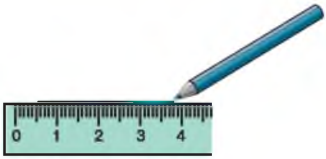
Мал. 1



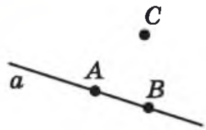
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

З точок складаються всі інші геометричні фігури. Отже, будь-яка множина точок є ***геометричною фігурою***.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об'єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 3 фігура складається з прямокутника і двох трикутників.

Однією з основних геометричних фігур є ***площина***. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має ані краю, ані товщини. У 7–9-х класах ви опрацьовуватимете частину шкільного курсу геометрії — ***планіметрію***. Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Прямі можна проводити за допомогою лінійки (мал. 4). При цьому ми зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають маленькими латинськими буквами a, b, c, d, ..., а точки — великими латинськими буквами A, B, C, D, ...

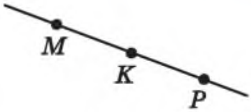
На малюнку 5 зображено пряму a і точки A, B, C. Точки A і B ***лежать*** на прямій a; кажуть також, що точки A і B ***належать прямій*** a або що пряма a ***проходить через точки*** A і B. Точка C ***не лежить*** на прямій a; інакше кажучи, точка C ***не належить*** прямій a або пряма a ***не проходить через точку*** C.

Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

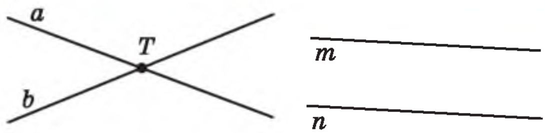
Для зручності замість слів «точка A належить прямій a» використовують запис $A \in a$, а замість слів «точка C не належить прямій a» — запис $C \notin a$.

Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншої прямої, яка б не збігалася з прямою a.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.



Мал. 6



Мал. 7

Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі», вважатимемо, що ці точки, прямі — різні.

Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад A і B, можна записати двома буквами: AB або BA. На малюнку 5 точка C не належить прямій AB (це записують так: $C \notin AB$), кажуть також, що *точки A, B і C не лежать на одній прямій.*

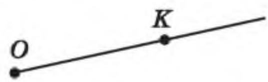
Точки M, K і P лежать на одній прямій (мал. 6), причому точка K лежить між точками M і P.

З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

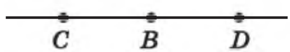
Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони ***перетинаються*** в цій точці. На малюнку 7 прямі a і b перетинаються в точці T, а прямі m і n не перетинаються.

Проведемо пряму та позначимо на ній точку A (мал. 8). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою A називають ***променем***, що виходить з точки A. Точка A називається ***початком*** кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга — деяку точку на промені (наприклад, промінь OK на малюнку 9).

Мал. 8



Мал. 9



Мал. 10

Два промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають ***доповняльними***. На малюнку 10 промінь BC є доповняльним для променя BD, і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC.

А ще раніше...

Перші відомості про властивості геометричних фігур люди отримували з практичної діяльності та спостережень за навколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об'ємів тіл, дійшов до нас із Давнього Єгипту. Він датується XVII ст. до н. е. Описані в цьому творі правила обчислення площ та об'ємів були отримані з практики. Ніяких логічних доведень їх істинності не наводилося. Самі ж значення площ та об'ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.

Про зародження геометрії у Давньому Єгипті давньогрецький історик Геродот (V ст. до н. е.) писав: «Сезострис, єгипетський фараон, розділив землю, давши кожному єгиптянину ділянку за жеребкуванням, та стягував відповідним чином податок з кожної ділянки. Бувало, що Ніл заливав ту чи іншу ділянку, тоді потерпілий звертався до фараона, а той посилав землемірів, щоб установити, на скільки зменшилася ділянка, і відповідно зменшував податок. Так виникла геометрія в Єгипті, а звідти перейшла в Грецію».

Фалес
(бл. 640–548 до н. е.)

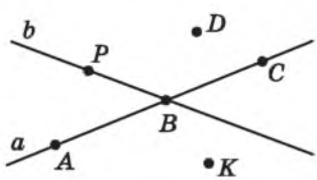
Саме в Давній Греції і відбулося становлення геометрії як науки. Завдяки грецьким геометрам Фалесу, Піфагору, Демокріту (бл. 460–370 рр. до н. е.) відбувся поступовий перехід від практичної до теоретичної геометрії. Ці та інші вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів і теорем, збагатили науку численними теоремами, які ми використовуємо й донині.

Таким чином, було створено науку, що вивчає форми, розміри, властивості, взаємне розташування геометричних фігур. Цю науку, як і раніше, називають *геометрією*, хоча її зміст вийшов далеко за межі вчення про вимірювання землі.

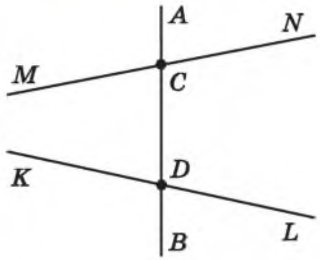
Піфагор
(бл. 580–500 до н. е.)

Що вивчає геометрія? Наведіть приклади геометричних фігур. Назвіть основні геометричні фігури на площині. Як позначають прямі та точки? Скільки прямих можна провести через дві точки? Що таке промінь? Як позначають промені? Які промені називають доповняльними?

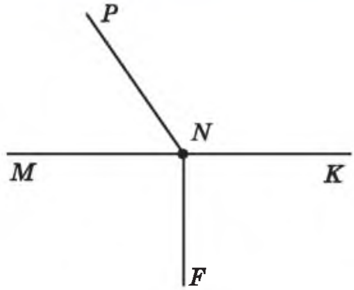
1. Назвіть за малюнком 11:
1) точки, що належать прямій a;
2) точки, що належать прямій b;
3) точку, що належить і прямій a, і прямій b;
4) точки, що належать прямій a, але не належать прямій b;
5) точки, що не належать ані прямій a, ані прямій b.



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

2. Позначте в зошиті точки *M* і *N* та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку *K*, що належить побудованій прямій, та точку *L*, яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

3. Проведіть пряму *a*. Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розташування прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.

4. На малюнку 12 пряма *AB* перетинає прямі *MN* і *KL* у точках *C* і *D*. Запишіть:

1) усі промені з початком у точці *C*;
2) пари доповняльних променів, початок яких — точка *D*.

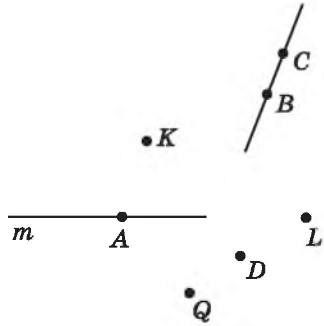
5. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 13.
2) Чи є серед цих променів пари доповняльних променів?

6. Позначте в зошиті точки *M*, *N*, *F* так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.

7. Позначте в зошиті точки *B*, *C* і *D* так, щоб записи *CD* і *CB* позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

8. Використовуючи малюнок 14:

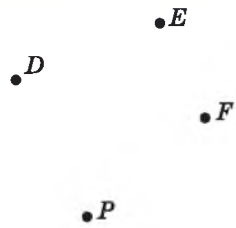
1) з'ясуйте, чи перетинаються прямі *m* і *CB*;
2) запишіть усі точки, які належать прямій *m*;
3) запишіть усі точки, які належать прямій *BC*;
4) запишіть точки, які не належать ані прямій *m*, ані прямій *BC*.



Мал. 14

9. Позначте в зошиті точки D, E, F, P, як на малюнку 15.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть назви всіх цих прямих.
2) Скільки всього прямих утворилося?
3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?



Мал. 15

10. Позначте в зошиті три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.
2) Скільки всього прямих утворилося?
3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

11. Точка A ділить пряму m на два промені. За якої умови точки B і C цієї прямої належать одному променю; різним променям?

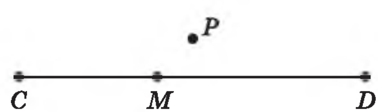
12. На площині проведено три прямі. На першій позначено 2017 точок, на другій — 2018, а на третій — 2019 точок. Яку найменшу загальну кількість точок при цьому може бути позначено?

§ 2. ВІДРІЗОК. ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

***Відрізком* називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.**

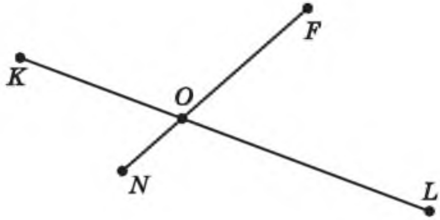
На малюнку 16 зображено відрізок AB (його також можна назвати відрізком BA); точки A і B — його кінці. На малюнку 17 точка M належить відрізку CD (її ще називають *внутрішньою точкою* відрізка), а точка P йому не належить.

Мал. 16



Мал. 17

На малюнку 18 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.

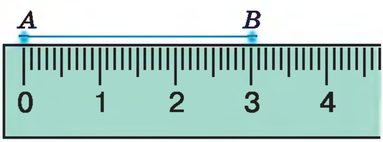


Мал. 18

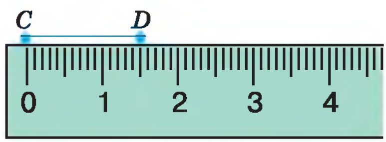
На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього необхідно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 19 довжина відрізка AB дорівнює 3 см. Коротко кажуть: «Відрізок AB дорівнює 3 см». На малюнку 20 довжина відрізка CD дорівнює 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так:

$$AB = 3 \text{ см}, \quad CD = 1{,}5 \text{ см} = 15 \text{ мм}.$$



Мал. 19



Мал. 20

Мал. 21

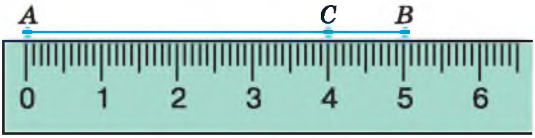
Мал. 22

Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

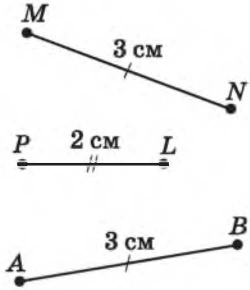
Іншими інструментами, якими можна вимірювати відрізки, є складаний метр (мал. 21), рулетка (мал. 22), клейончастий сантиметр (мал. 23).

На малюнку 24 зображено відрізок AB. Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB (кажуть також, що точка C належить

Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

відрізку AB). Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Отже, $AC + CB = AB$.

Маємо *основну властивість вимірювання* відрізків.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***. На малюнку 24 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 25 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB, тому ці відрізки рівні. Можна записати: $MN = AB$. На цьому самому малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL. Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL, записують це так: $MN > PL$.

На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок, а відрізки неоднакової довжини — різною кількістю рисочок.

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні відрізки, називають ***серединою відрізка***.

На малюнку 26 $AC = 2$ см, $CB = 2$ см, тому точка C — середина відрізка AB.

Мал. 26

Задача. Точка K належить відрізку AB, довжина якого 15 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB, якщо AK більший за KB на 3 см.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо малюнок 27, на якому точка K належить відрізку AB; $AB = 15$ см.

Мал. 27

Нехай $KB = x$ см, тоді $AK = (x + 3)$ см.

Оскільки $AK + KB = AB$ (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв'яжемо отримане рівняння: $2x + 3 = 15$; $x = 6$ (см).

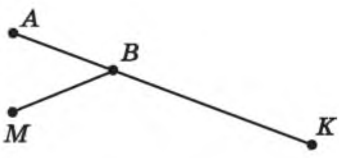
Отже, $KB = 6$ см, $AK = 6 + 3 = 9$ (см).

В і д п о в і д ь. $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.

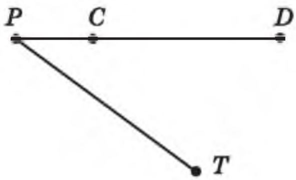
Що називають відрізком? ● Що таке кінці відрізка? ● Які одиниці вимірювання довжини ви знаєте? ● Якими інструментами вимірюють довжини відрізків? ● Що називають відстанню між двома точками? ● Сформулюйте основну властивість вимірювання довжин відрізків. ● Які відрізки називають рівними? ● Яку точку називають серединою відрізка?

1 **13.** Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 28. Виміряйте довжини двох з них.

14. Запишіть усі відрізки, зображені на малюнку 29, та виміряйте довжини трьох з них.



Мал. 28



Мал. 29

15. Позначте в зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

2 **16.** Накресліть відрізки AB і MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN.

17. Накресліть відрізки KL і FP так, щоб $KL = 5$ см 9 мм, $FP = 6$ см 8 мм. Порівняйте довжини відрізків KL і FP.

18. Точка C лежить між точками A і B (мал. 30). Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;

2) BC, якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм.

Мал. 30

19. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 31). Знайдіть:

Мал. 31

1) PQ, якщо $PK = 3$ дм, $KQ = 7$ дм;
2) PK, якщо $PQ = 8$ см, $KQ = 6$ см.

20. Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:
1) $KL = 8$ см, $LM = 3$ см, $KM = 11$ см;
2) $KL = 5$ см, $LM = 9$ см, $KM = 8$ см?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

21. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 7$ см, $BC = 3$ см, $AC = 9$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AC = 7$ см?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

22. На прямій позначено точки P, L і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0{,}74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

23. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $AB = 12$ см, $BC = 1{,}5$ дм, $AC = 40$ мм?

24. На малюнку 32 довжини відрізків AB і CD однакові. Обґрунтуйте, чому $AC = BD$.

Мал. 32

25. На малюнку 32 довжини відрізків AC і BD однакові. Обґрунтуйте, чому $AB = CD$.

26. Точки C і D належать відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см.

27. Точки M і N належать відрізку CD. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $MN = 50$ см, $MC = 40$ см, $ND = 16$ см.

28. Точка C належить відрізку $AB = 7{,}6$ дм. Визначте довжини відрізків AC і BC, якщо: 1) AC втричі менший від BC; 2) AC більший за BC на 2,8 дм.

29. Точка M належить відрізку $CD = 8{,}4$ см. Визначте довжини відрізків CM і DM, якщо: 1) CM більший за DM на 0,6 см; 2) $CM : DM = 1 : 3$.

30. Точки C, D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M — 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

31. На прямій позначено точки A, M і N, причому $AM = 7{,}2$ см, $MN = 2{,}5$ см. Знайдіть відстань між точками A і N. Скільки розв'язків має задача?

32. Розділіть трикутник двома прямими на:
1) два трикутники і один чотирикутник;
2) два трикутники, один чотирикутник і один п'ятикутник.

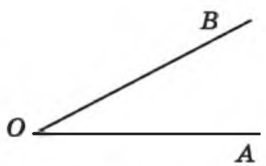
§ 3. КУТ. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. БІСЕКТРИСА КУТА

Кут — це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.

Промені називають ***сторонами кута***, а їх спільний початок — ***вершиною кута***.

На малюнку 33 зображено кут з вершиною O і сторонами OA і OB. Такий кут можна назвати по-різному: кут O, або кут AOB, або кут BOA. У другому та третьому варіантах назви кута буква O, що позначає його вершину, ставиться посередині. Слово «кут» можна замінити знаком $\angle$, записавши кут O так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 34).

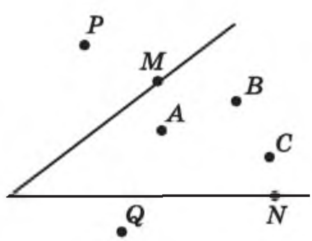


Мал. 33

Мал. 34

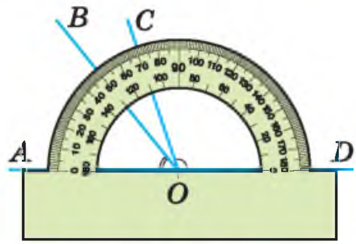
Будь-який кут ділить площину на дві частини. Якщо кут не є розгорнутим, то одну із частин називають ***внутрішньою областю*** кута, а іншу — ***зовнішньою*** (мал. 35). На малюнку 36 точки A, B і C належать внутрішній області кута (лежать усередині кута), точки M і N належать сторонам кута, а точки P і Q належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим, то будь-яку з двох частин, на які він ділить площину, можна вважати внутрішньою областю кута.

Мал. 35



Мал. 36

За одиницю вимірювання кутів приймають ***градус*** — кут, який становить $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута. Позначають градус знаком °. Для вимірювання кутів використовують ***транспортир*** — інструмент, який ви знаєте з молодших класів.



Мал. 37

На малюнку 37 градусна міра кута *AOB* дорівнює 50°, а кута *COD* — 110°. Коротко кажуть: кут *AOB* дорівнює 50°, кут *COD* дорівнює 110°; записують так: $\angle AOB = 50°$, $\angle COD = 110°$.

Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

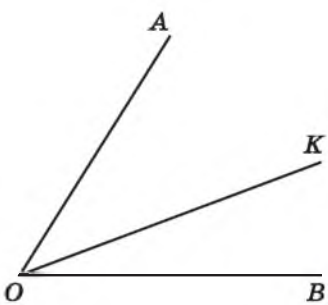
Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах. *Мінута* — це $\frac{1}{60}$ частина градуса, *секунда* — $\frac{1}{60}$ частина мінути. Мінути позначають знаком ′, секунди — знаком ″. Отже, 1° = 60′, 1′ = 60″.

На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 38).

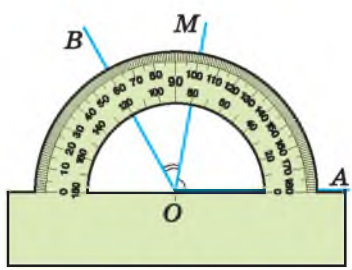
Мал. 38

Будемо вважати, що промінь *OK* ***проходить між сторонами кута AOB***, якщо він виходить з його вершини і лежить у його внутрішній області (мал. 39).

На малюнку 40 промінь *OM* проходить між сторонами кута *AOB* і ділить його на два кути: *BOM* і *MOA*. Бачимо, що $\angle BOM = 40°$, $\angle MOA = 80°$, $\angle AOB = 120°$. Отже, $\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA$.



Мал. 39



Мал. 40

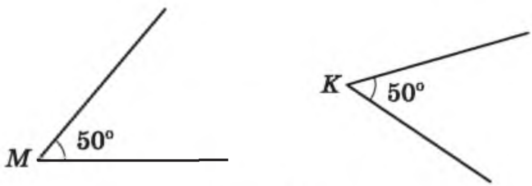
Маємо *основну властивість вимірювання кутів*.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

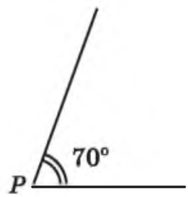
З'ясуємо, як порівнювати кути.

Два кути називають *рівними*, якщо в них однакові градусні міри.

З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого є більшою. На малюнку 41 градусна міра кута M дорівнює 50°, градусна міра кута K також дорівнює 50°. Тому ці кути рівні. Можна записати: $\angle M = \angle K$. На малюнку 42 градусна міра кута P дорівнює 70°, тому кут P більший за кут M. Записують це так: $\angle P > \angle M$. На малюнках рівні кути прийнято позначати однаковою кількістю дужок при вершині, а якщо кути не є рівними, — різною кількістю дужок.

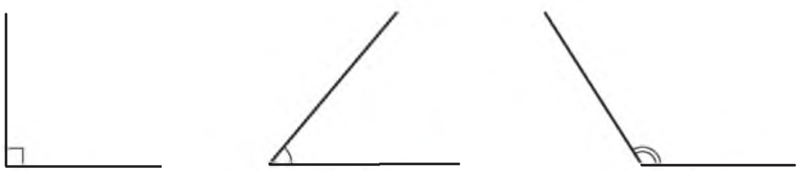


Мал. 41



Мал. 42

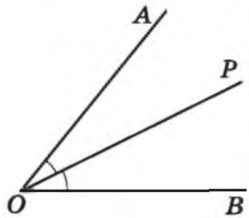
Кут називають ***прямим***, якщо його градусна міра дорівнює 90°, ***гострим***, якщо він менший від прямого, ***тупим***, якщо він більший за прямий, але менший від розгорнутого (мал. 43). Прямий кут на малюнках позначають знаком ⌝.


Прямий Гострий Тупий

Мал. 43

Бісектрисою кута **називають промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.**

На малюнку 44 промінь *OP* — бісектриса кута *AOB*.



Мал. 44

Задача. $\angle ABC = 100°$, *BK* — бісектриса кута *ABC*, а *BL* — бісектриса кута *KBC*. Знайти $\angle ABL$.

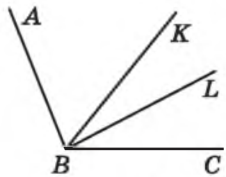
Р о з в ’ я з а н н я. Розглянемо мал. 45.

1) $\angle KBC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$;

2) $\angle LBC = \dfrac{\angle KBC}{2} = \dfrac{50°}{2} = 25°$;

3) $\angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 100° - 25° =$
$= 75°$.

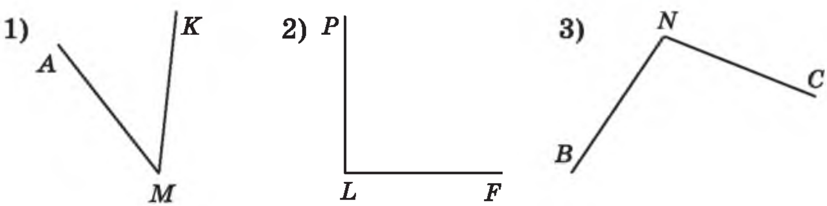
В і д п о в і д ь. 75°.



Мал. 45

Яку фігуру називають кутом? • Як позначають кут? • Що таке вершина кута; сторона кута? • Який кут називають розгорнутим? • Якими інструментами вимірюють кути? • У яких одиницях вимірюють кути? • Що означає вираз: «Промінь проходить між сторонами кута»? • Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. • Які кути називають рівними? • Який кут називають прямим; гострим; тупим? • Який промінь називають бісектрисою кута?

33. Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 46.



Мал. 46

34. Запишіть вершину і сторони кута: 1) *MOP*; 2) *BLK*.

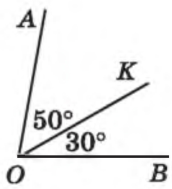
35. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 39°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 91°$;
4) $\angle D = 170°$; 5) $\angle M = 180°$; 6) $\angle Q = 79°$;
7) $\angle P = 1°3'$; 8) $\angle F = 173°12'$?

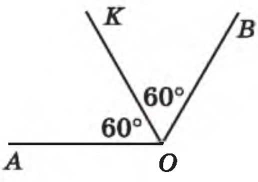
36. Випишіть, які з даних кутів гострі, тупі, прямі, розгорнуті:

1) $\angle K = 121°$; 2) $\angle A = 90°$;
3) $\angle L = 12°$; 4) $\angle E = 180°$;
5) $\angle M = 89°$; 6) $\angle N = 93°12'$.

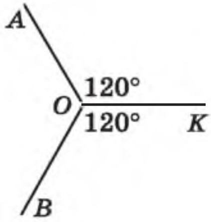
37. (*Усно*) Чи є промінь *OK* бісектрисою кута *AOB* (мал. 47–49)?



Мал. 47

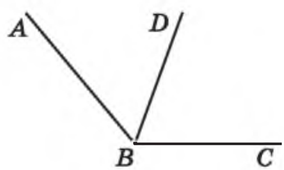


Мал. 48



Мал. 49

38. За малюнком 50:
1) запишіть усі зображені кути;
2) користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох з них;
3) обчисліть градусну міру третього кута.



Мал. 50

39. Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 46. Визначте вид кожного з них.

40. Накресліть кут градусної міри:
1) 30°; 2) 90°; 3) 115°; 4) 75°.

41. Накресліть кут, градусна міра якого:
1) 65°; 2) 100°; 3) 20°; 4) 155°.

42. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 140°, та проведіть його бісектрису.

43. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 50°, та проведіть його бісектрису.

44. Виконайте дії:
1) $7°13' + 12°49'$; 2) $52°17' - 45°27'$.

45. 1) Виразіть у мінутах: 4°; 2°15′.
2) Виразіть у секундах: 5′; 2°; 1°3′.

46. Промінь *OK* проходить між сторонами кута *BOC*. Знайдіть градусну міру кута *BOC*, якщо $\angle BOK = 38°$, $\angle KOC = 42°$. Виконайте малюнок.

47. Промінь PC проходить між сторонами кута APB. Знайдіть градусну міру кута CPB, якщо $\angle APB = 108°$, $\angle APC = 68°$. Виконайте малюнок.

48. Чи проходить промінь BK між сторонами кута ABC, якщо $\angle ABC = 52°$, $\angle ABK = 57°$? Відповідь обґрунтуйте.

49. Знайдіть градусні міри кутів між годинною та хвилинною стрілками годинника:

1) о 18 год; 2) о 3 год;
3) о 1 год; 4) о 20 год.

50. Знайдіть градусну міру кута між годинною та хвилинною стрілками годинника:

1) о 21 год; 2) о 6 год;
3) о 19 год; 4) о 2 год.

51. Промінь OC ділить кут AOB на два кути. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle AOB = 60°$ і $\angle AOC = \frac{2}{3}\angle AOB$.

52. Промінь AB ділить кут MAK на два кути. Знайдіть градусну міру кута MAK, якщо $\angle MAB = 70°$, а кут BAK складає 60 % від кута MAB.

53. Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін за вершину кута дорівнює 142°. Знайдіть градусну міру цього кута.

54. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

55. $\angle MQB = 120°$. Між сторонами кута проходить промінь QP так, що кут PQB у 4 рази менший від кута MQP. Знайдіть кути PQB і MQP.

56. Промінь AC проходить між сторонами кута MAN, який дорівнює 86°. Знайдіть кути MAC і CAN, якщо кут MAC більший за кут CAN на 14°.

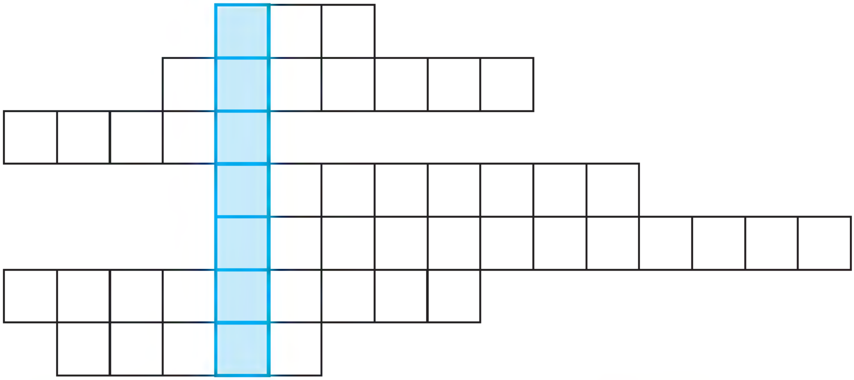
57. Розгорнутий кут AOB променями OK і OL поділено на три кути так, що $\angle AOK = 140°$, $\angle BOL = 100°$. Знайдіть градусну міру кута LOK.

58. Прямий кут COD променями OM і ON поділено на три кути так, що $\angle CON = 70°$, $\angle MOD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута MON.

59. 1) Пригадайте назви геометричних фігур, які ви розглянули в цьому розділі, і фігур, які відомі вам з попередніх класів. Запишіть їхні назви в рядках (див. с. 22).

Якщо назви фігур записано правильно, то у виділеному стовпчику можна прочитати прізвище видатного українського математика.

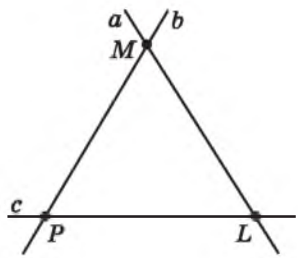
2) Знайдіть у літературі чи Інтернеті відомості про життєвий і творчий шлях цього математика. Інформацію про цього вченого можна знайти також і на сторінках підручника.



Вправи для повторення розділу 1

До § 1

60. За малюнком 51 укажіть:
1) точку перетину прямих a і b;
2) які точки належать прямій c;
3) чи належить точка M прямій PL;
4) як інакше можна назвати пряму b.



Мал. 51

61. 1) Побудуйте промені OK, OM і ON так, щоб промінь OM був доповняльним для променя ON.

2) Побудуйте промені OA, OB і OC так, щоб серед побудованих променів не було жодної пари доповняльних.

62. Позначте точки A, B і C так, щоб записи AB і AC означали дві різні прямі.

63. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку M, яка належить іншій прямій. Що можна сказати про точку M і точку перетину цих прямих?

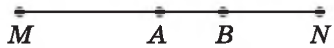
64. Точки A і B належать прямій l. Пряма m відмінна від прямої l і проходить через точку A. Чи може точка B належати прямій m? Відповідь обґрунтуйте.

До § 2

65. 1) Позначте в зошиті точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок. 2) Позначте в зошиті точки D, E і F, які лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.

66. Накресліть відрізок $KL = 6$ см 8 мм. Позначте на ньому точку P так, що $KP = 43$ мм. Знайдіть довжину відрізка LP за допомогою обчислень.

67. Сумою яких двох відрізків є відрізок MN (мал. 52)? Розгляньте всі можливі випадки.



Мал. 52

68. 1) Три прямі перетинають відрізок AB, причому жодна з точок перетину прямих і відрізка не збігається з кінцями відрізка. На скільки частин ці точки можуть поділити відрізок? 2) На скільки частин поділиться відрізок, якщо кількість прямих дорівнює n?

69. Точка C — середина відрізка AB, точка D — середина відрізка AC. Знайдіть:

1) AC, CB, AD і DB, якщо $AB = 20$ см;
2) AB, AC, AD і DB, якщо $BC = 12$ дм.

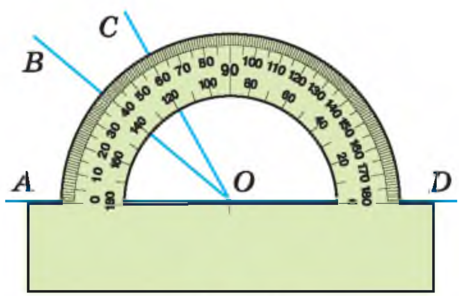
70. Точки M і N належать відрізку CD. $CD = 15$ см, $CM = 12$ см, $DN = 11$ см. Знайдіть довжину відрізка NM.

71. Точка P належить відрізку AB. На прямій AB позначте таку точку C, що $BC = \frac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

72. Точка K належить відрізку CD, довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KD.

До § 3

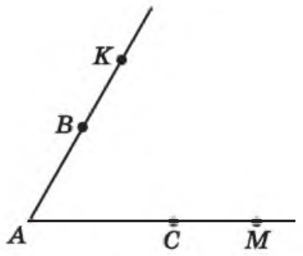
73. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 53.



Мал. 53

74. Два учні накреслили кути по 70°. Один з учнів сказав, що в нього кут більший, оскільки сторони його кута мають більшу довжину. Чи правий цей учень?

75. Використовуючи малюнок 54, укажіть усі можливі назви кута з вершиною A з даних: KAC, BAM, CAM, KMA, BAC, AKM, ABC, MAK, KAM, CAK.



Мал. 54

76. Накресліть один гострий кут і один тупий. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

77. 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?

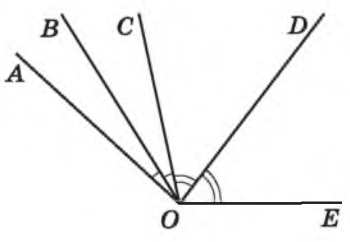
2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 6 хв; 40 хв?

78. OK — бісектриса кута AOB, OL — бісектриса кута KOB. Знайдіть:

1) $\angle LOK$, якщо $\angle AOB = 120°$;
2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37°$.

79. $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (мал. 55). Знайдіть:

1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140°$;
2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73°$.



Мал. 55

80. $\angle AOB = 168°$, промінь OM проходить між його сторонами. $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть ці кути.

Розділ 2 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** паралельні та перпендикулярні прямі;
- **дізнаєтеся**, що таке аксіома, теорема, означення, ознака, наслідок; суміжні і вертикальні кути; кут між двома прямими; кути, що утворилися при перетині двох прямих січною;
- **навчитеся** зображувати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою косинця і лінійки; застосовувати властивості суміжних і вертикальних кутів та кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, до розв'язування задач; доводити теореми.

§ 4. *АКСІОМИ, ТЕОРЕМИ, ОЗНАЧЕННЯ*

Аксіоми геометрії — це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення.

У перекладі з грецької слово ***аксіома*** означає ***прийняте положення***.

Нагадаємо деякі вже відомі вам аксіоми.

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають ***теоремою***, а саме міркування називають *доведенням теореми*.

Кожна теорема містить ***умову*** (те, що дано) і ***висновок*** (те, що необхідно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок — після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Ніякі інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Твердження, у якому пояснюється зміст певного поняття (термін), називають ***означенням***. Ви вже знаєте деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Основи» зібрав і узагальнив багаторічний науковий досвід. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на їх основі за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і досі, формулюючи деякі з аксіом Евкліда в більш сучасному вигляді.

Евклід
(III ст. до н. е.)

«Основи» згодом було перекладено на більшість європейських мов. У 1880 р. видатний український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко опублікував переклад «Основ», додавши пояснення інших питань геометрії (зокрема, геометрії Лобачевського).

Саму науку, викладену в «Основах», називають *евклідовою геометрією*.

Значний внесок у розвиток геометрії зробили й інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) та *Аполлоній* (III ст. до н. е.).

Аналіз системи аксіом, запропонованих Евклідом, тривав не одне століття. Його на межі XIX і XX ст. завершив видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Він створив повну і несуперечливу систему аксіом геометрії Евкліда.

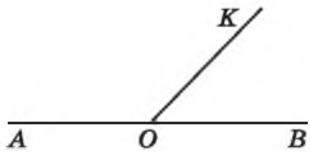
М.Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)

Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом. Що таке теорема; доведення теореми? Що таке означення?

§ 5. СУМІЖНІ КУТИ

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 56 кути AOK і KOB — суміжні, сторона OK у них — спільна, а OA і OB є доповняльними променями.



Мал. 56

Т е о р е м а (властивість суміжних кутів). **Сума суміжних кутів дорівнює 180°.**

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ — суміжні кути (мал. 56). Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180°$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°. Теорему доведено. ▲

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають ***наслідками***. Розглянемо наслідки з доведеної теореми.

Н а с л і д о к 1. **Кут, суміжний з прямим кутом, — прямий.**

Н а с л і д о к 2. **Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, кут суміжний з тупим кутом, — гострий.**

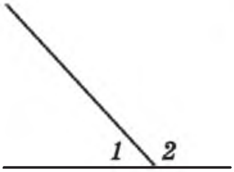
Задача. Знайти градусну міру кожного із суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за другий.

Р о з в ' я з а н н я. Для зручності записів позначимо менший з даних кутів — $\angle 1$, а більший — $\angle 2$. Нехай $\angle 1 = x°$, тоді $\angle 2 = x° + 56°$. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (за властивістю суміжних кутів), маємо рівняння: $x + x + 56 = 180$, звідки $x = 62°$. Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62°, а другий $62° + 56° = 118°$.

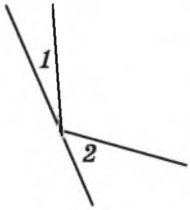
В і д п о в і д ь. 62°; 118°.

Які кути називають суміжними? Сформулюйте і доведіть теорему про властивість суміжних кутів.

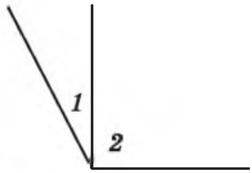
81. (*Усно*) На яких з малюнків 57–60 кути *1* і *2* є суміжними?



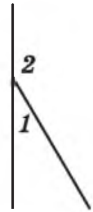
Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60

82. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) 42° і 148°; 2) 90° і 90°;
3) 166° і 14°; 4) 23° і 156°?

83. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) 13° і 167°; 2) 5° і 165°;
3) 11° і 179°; 4) 91° і 89°?

84. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 15°; 2) 113°.

85. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 127°; 2) 39°.

86. Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що ON — їх спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

87. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що PA — їх спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

88. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють 15° і 72°. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

89. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює 36°. Знайдіть градусну міру кута, який суміжний з кутом M.

90. Накресліть два суміжних кути так, щоб їх спільна сторона була вертикальною, а градусні міри — неоднаковими.

91. Накресліть два суміжних кути різної градусної міри так, щоб їх спільна сторона була горизонтальною.

92. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть це твердження.

93. Якщо кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні. Доведіть це твердження.

94. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на $18°$ менший від іншого.

95. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них утричі більший за інший.

96. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них складає $\frac{3}{7}$ від іншого.

97. Дано тупий кут A і гострий кут B, градусні міри яких відносяться як $4 : 3$. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює $80°$.

98. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

99. Два кути відносяться як $1 : 2$, а суміжні з ними — як $7 : 5$. Знайдіть дані кути.

100. Один з двох даних кутів на $20°$ більший за другий, а суміжні з ними відносяться як $5 : 6$. Знайдіть дані кути.

101. Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.

102. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює: 1) $27°$; 2) $119°$.

103. Точки A, B і C лежать на одній прямій; $AB = 2{,}7$ см, $BC = 3{,}6$ см. Чи може відстань між точками A і C дорівнювати:

1) 0,8 см; 2) 0,9 см; 3) 1 см;
4) 6,1 см; 5) 6,3 см; 6) 6,5 см?

104. Анаграми. У цій задачі треба розшифрувати кожний запис, переставивши букви в ньому так, щоб отримати відоме слово. Такі перестановки називають анаграмами. Наприклад, розв’язати анаграму ВДАКТАР означає знайти слово, складене з даних букв, — це КВАДРАТ.

Розв’яжіть анаграми:

1) ТУК; 2) АРЯМП; 3) КЛЕІВД; 4) МОРТЕІЯГЕ.

§ 6. *ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ. КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ*

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.

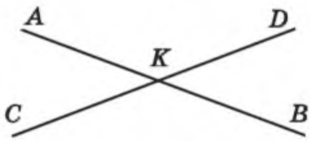
На малюнку 61 прямі AB і CD перетинаються в точці K. Кути AKC і DKB — вертикальні, кути AKD і CKB теж вертикальні.

Т е о р е м а (властивість вертикальних кутів). Вертикальні кути рівні.

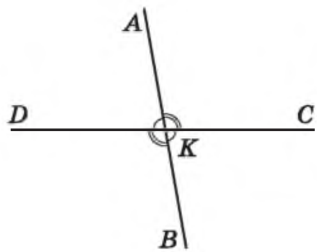
Д о в е д е н н я. Нехай *AKC* і *DKB* — вертикальні кути (мал. 61). Оскільки кути *AKC* і *AKD* суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180°$. Також суміжні кути *AKD* і *DKB*, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180°$. Маємо:

$\angle AKC = 180° - \angle AKD$ і $\angle DKB = 180° - \angle AKD$.

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є і ліві їх частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено. ▲



Мал. 61



Мал. 62

Задача. Два із чотирьох нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Р о з в ' я з а н н я. Кожні два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, є або суміжними, або вертикальними (мал. 62). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то в задачі йдеться про суміжні кути. Наприклад $\angle AKD$ і $\angle AKC$. За умовою $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, тому можемо ввести позначення: $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$. Оскільки $\angle AKD + \angle AKC = 180°$, маємо рівняння: $4x + 5x = 180°$, звідки $x = 20°$. Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20° = 80°$, $\angle AKC = 5 \cdot 20° = 100°$. Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80°$, $\angle BKD = \angle AKC = 100°$.

В і д п о в і д ь. 80°, 100°, 80°, 100°.

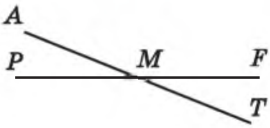
***Кутом між прямими, що перетинаються*, називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

Наприклад, кут між прямими *AB* і *DC* з попередньої задачі дорівнює 80°. Кут між прямими не може перевищувати 90°.

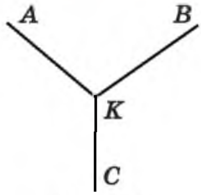
Які кути називають вертикальними? Яку властивість мають вертикальні кути? Який кут називають кутом між двома прямими?

105. (*Усно*) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 63.

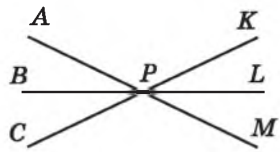
106. (*Усно*) Чи є на малюнку 64 вертикальні кути?



Мал. 63



Мал. 64



Мал. 65

107. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15°; 2) 129°. Знайдіть другий кут.

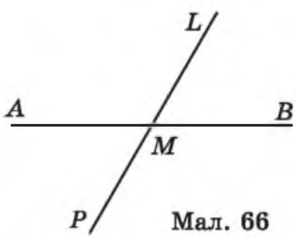
108. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42°; 2) 139°. Знайдіть другий кут.

109. На малюнку 65 прямі AM, BL і CK перетинаються в точці P. Знайдіть усі пари вертикальних кутів.

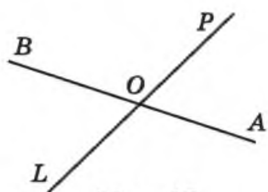
110. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.

111. На малюнку 66 $\angle AML = 120°$. Знайдіть $\angle AMP$, $\angle PMB$ і $\angle BML$.

112. (*Усно*) Учень накреслив дві прямі, що перетинаються, та вимірявши транспортиром один з кутів, які при цьому утворилися, отримав 130°. Чи може він стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130°? Відповідь поясніть.



Мал. 66



Мал. 67

113. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 67). $\angle POB = 118°$. Знайдіть кут між прямими AB і PL.

114. Накресліть дві прямі, що перетинаються, та знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

115. Накресліть кут MON, що дорівнює 110°. Побудуйте доповняльні промені OL і OK до його сторін OM і ON відповідно.

Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

116. Накресліть кут AOB, що дорівнює 30°. Побудуйте доповняльні промені OP і OD до його сторін OA і OB відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

117. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) усі кути рівні між собою;

2) сума двох з них дорівнює 178°.

118. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) сума двох з них дорівнює 16°;

2) три із чотирьох кутів рівні між собою.

3 **119.** Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:

1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18°;

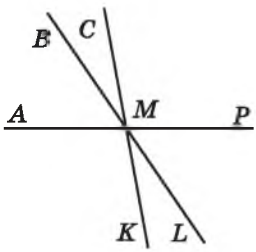
2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293°.

120. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, удвічі менший від іншого.

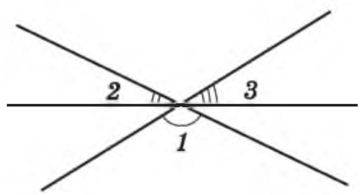
4 **121.** На мал. 68 прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M, $\angle BMC = 20°$, $\angle LMP = 60°$. Знайдіть $\angle AMK$.

122. На мал. 68 прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M, $\angle CMP = 105°$, $\angle KML = 25°$. Знайдіть $\angle AMB$.

123. На малюнку 69 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів 1, 2 і 3.



Мал. 68



Мал. 69

124. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.

2 **125.** На прямій послідовно позначено 10 точок так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між двома крайніми точками.

126. Відомо, що $\angle ABC = 70°$, а $\angle CBD = 20°$. Чи може градусна міра кута ABD дорівнювати:

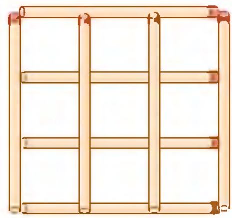
1) 40°; 2) 50°; 3) 60°;

4) 80°; 5) 90°; 6) 100°?

127. На малюнку 70 фігуру складено з восьми сірників.

1) Скільки квадратів при цьому утворилося?

2) Як прибрати два сірники так, щоб залишилося лише три квадрати?



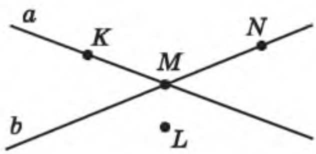
Мал. 70

Домашня самостійна робота № 1 (§1—§6)

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), *серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.*

1. Яка з точок на малюнку 71 належить як прямій a, так і прямій b?

А) K; Б) L; В) M; Г) N.



Мал. 71

2. Який із запропонованих кутів є тупим?

А) $\angle M = 129°$; Б) $\angle T = 90°$; В) $\angle N = 180°$; Г) $\angle L = 78°$.

3. Пара суміжних кутів може дорівнювати...

А) 18° і 172°; Б) 27° і 153°; В) 25° і 145°; Г) 47° і 134°.

4. Промінь OP проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть градусну міру кута AOB, якщо $\angle AOP = 20°$, $\angle POB = 50°$.

А) 30°; Б) 70°; В) 110°; Г) неможливо визначити.

5. Точка L належить відрізку AB. Знайдіть AL, якщо $LB = 5$ см, $AB = 8$ см.

А) 13 см; Б) 9 см; В) 4 см; Г) 3 см.

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 160°. Знайдіть кут між прямими.

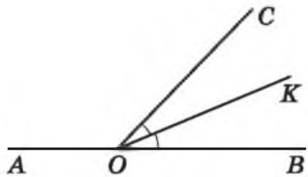
А) 160°; Б) 100°; В) 80°; Г) 20°.

7. Відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Укажіть взаємне розташування точок A, B і C.

А) точка A лежить між точками B і C;
Б) точка B лежить між точками A і C;
В) точка C лежить між точками B і A;
Г) жодна з точок не лежить між двома іншими.

8. Промінь OK є бісектрисою кута COB, $\angle COB = 70°$ (мал. 72). Знайдіть $\angle AOK$.

А) 110°; Б) 135°; В) 145°; Г) 155°.



Мал. 72

9. Один із суміжних кутів удвічі менший за другий. Знайдіть більший із цих кутів.

А) 60°; Б) 80°; В) 100°; Г) 120°.

10. На площині позначено п'ять точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих, кожна з яких проходить через деякі дві з даних точок, можна провести?

А) 5; Б) 8; В) 10; Г) 15.

11. Розгорнутий кут MON поділено променями OA і OB на три кути. $\angle MOA = 120°$, $\angle NOB = 110°$. Знайдіть градусну міру кута AOB.

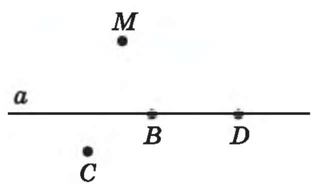
А) 50°; Б) 60°; В) 70°; Г) 80°.

12. Дано два кути, градусні міри яких відносяться як 1 : 2. Різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 70°. Знайдіть більший з даних кутів.

А) 70°; Б) 90°; В) 110°; Г) 140°.

Завдання для перевірки знань № 1 (§ 1—§ 6)

1. Назвіть точки, що належать прямій a, та точки, що їй не належать (мал. 73). Зробіть відповідні записи.

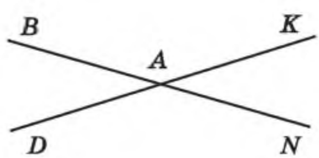


Мал. 73

2. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 92°$; 2) $\angle B = 180°$;
3) $\angle C = 90°$; 4) $\angle D = 31°$?

3. За малюнком 74 назвіть пари вертикальних кутів.



Мал. 74

4. Точка C належить відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо $MN = 7,2$ см, $CN = 3,4$ см.

5. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70°, та проведіть його бісектрису.

6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $\angle AOC = 132°$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.

3 **7.** Точки M і N належать відрізку AB, довжина якого дорівнює 30 см. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $AM = 20$ см, $BN = 16$ см.

8. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший від другого.

4 **9.** Точки A, B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AK = 9{,}3$ см, $KB = 3{,}7$ см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові вправи

4 **10.** Який кут утворює бісектриса кута 48° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

11. Два кути відносяться як 1 : 3, а суміжні з ними — як 7 : 3. Знайдіть дані кути.

§ 7. *ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ*

Нехай при перетині двох прямих a і b один з кутів, що утворилися, є прямим, наприклад $\angle 1 = 90°$ (мал. 75).

$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 3 = \angle 1 = 90°$.

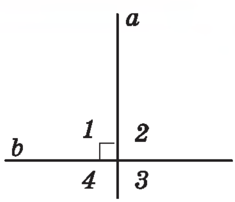
$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні, тому $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 90° = 90°$.

$\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 90°$.

Отже, якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта кутів також прямі. У такому випадку кажуть, що прямі перетинаються під прямим кутом, або що вони перпендикулярні.

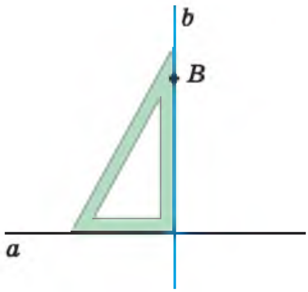
Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 75 прямі a і b перпендикулярні. Перпендикулярність прямих можна записати за допомогою знака $\perp$. Запис $a \perp b$ читають так: «пряма a перпендикулярна до прямої b».

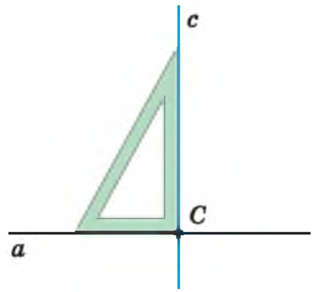


Мал. 75

Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський косинець. На малюнку 76 через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, перпендикулярну до прямої a. На малюнку 77 точка C належить прямій a, і через неї перпендикулярно до прямої a проведено пряму c. В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої a.



Мал. 76



Мал. 77

Отже,

через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

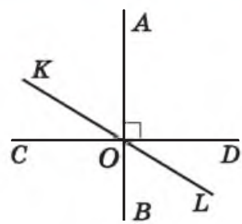
Задача. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 78). Знайти $\angle AOK$, якщо $\angle COL = 160°$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle COB = 90°$.

2) $\angle BOL = \angle COL - \angle COB = 160° - 90° = 70°$.

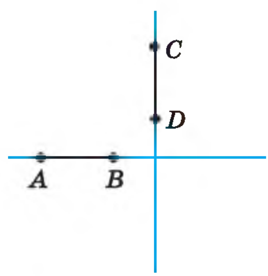
3) $\angle AOK = \angle BOL$ (як вертикальні), тому $\angle AOK = 70°$.

В і д п о в і д ь. 70°.

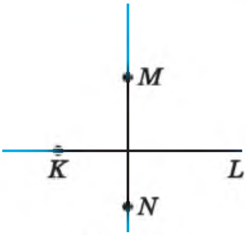


Мал. 78

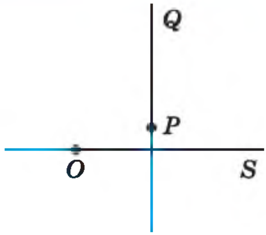
Відрізки або *промені* називають ***перпендикулярними***, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Наприклад, на малюнку 79 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD, на малюнку 80 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN, а на малюнку 81 промінь PQ перпендикулярний до променя OS. Для запису перпендикулярності відрізків і променів також використовують знак $\perp$.



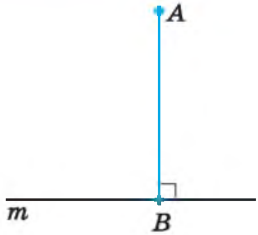
Мал. 79



Мал. 80



Мал. 81



Мал. 82

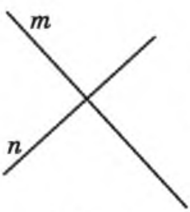
***Перпендикуляром до прямої*, проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого — дана точка, а другий — точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.**

На малюнку 82 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m. Точка B — ***основа перпендикуляра***, а довжина відрізка AB — відстань від точки A до прямої m.

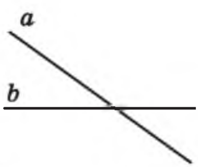
Які прямі називають перпендикулярними? Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки? Що називають відстанню від точки до прямої?

128. На яких з малюнків 83–86 зображено перпендикулярні прямі? У разі потреби використайте косинець. Виконайте відповідні записи.

129. Накресліть пряму c та позначте точку A, що їй належить, і точку B, що їй не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб вони були перпендикулярними до прямої c.

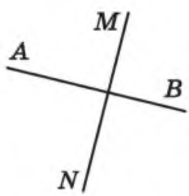


Мал. 83



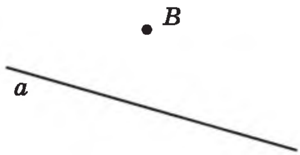
Мал. 84

Мал. 85

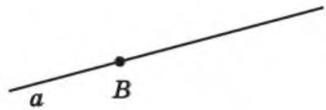


Мал. 86

130. Перенесіть малюнки 87 і 88 у зошит та для кожного випадку за допомогою косинця проведіть пряму b, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a.



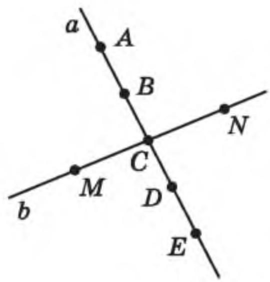
Мал. 87



Мал. 88

131. На малюнку 89 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки AB і MN;
2) промінь EA і відрізок CM;
3) відрізки AB і DE;
4) промені CN і CE?



Мал. 89

132. На малюнку 89 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки DE і CN;
2) промені CM і CA;
3) промінь CE і відрізок CA;
4) відрізки BD і MN?

133. Накресліть пряму a, позначте точку A, що знаходиться на відстані 2,5 см від прямої a, та точку B, що знаходиться на відстані 4 см від прямої a.

134. Проведіть пряму m, позначте точку P, що знаходиться на відстані 3 см від прямої m, та точку K, що знаходиться на відстані 1,5 см від прямої m.

135. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярними та не перетиналися.

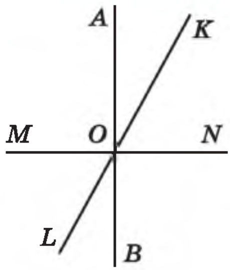
136. Накресліть промені MN і KL так, щоб вони були перпендикулярними та перетиналися.

137. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 90). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо

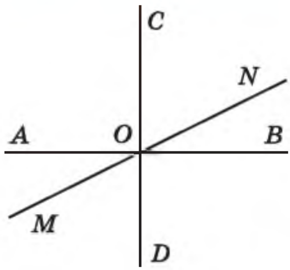
1) $\angle AOK = 25°$, $\angle KON = 66°$;
2) $\angle LON = 118°$, $\angle LOB = 28°$?

138. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 90). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо

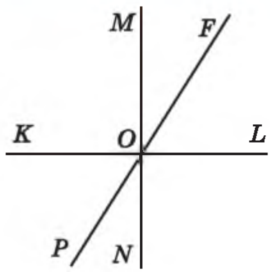
1) $\angle MOK = 122°$, $\angle AOK = 31°$;
2) $\angle MOL = 59°$, $\angle LOB = 31°$?



Мал. 90



Мал. 91



Мал. 92

139. (*Усно*) Чи є правильним означення: «Перпендикуляр до прямої — це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

140. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 91). Знайдіть:

1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25°$;

2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150°$.

141. Прямі KL, MN і PF перетинаються в точці O, причому $KL \perp MN$ (мал. 92). Знайдіть:

1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140°$;

2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37°$.

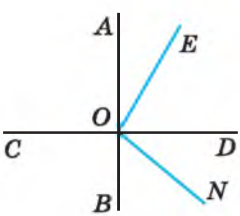
142. Кути ABC і CBM прямі. Доведіть, що точки A, B і M лежать на одній прямій.

143. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні між собою. Доведіть, що це перпендикулярні прямі.

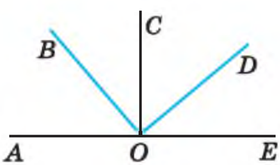
144. $AB \perp CD$ (мал. 93), $\angle EON = 110°$. Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle AOE = 20°$.

145. $AB \perp CD$ (мал. 93), $\angle CON = 135°$, $\angle AOE = 25°$. Знайдіть $\angle EOD$.

146. На малюнку 94 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.



Мал. 93



Мал. 94

147. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

148. Промені OK і OL є бісектрисами кутів AOB і BOC відповідно, причому $OK \perp OL$. Доведіть, що кути AOB і BOC — суміжні.

149. На прямій послідовно позначено точки M, N і K. Знайдіть:

1) MK, якщо MN = 3 см 2 мм, NK = 4,1 см;

2) MN, якщо MK = 7,8 см, NK = 2 см 5 мм.

150. Знайдіть суміжні кути, різниця яких дорівнює 36°.

151. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а довжина кожної з його сторін є цілим числом сантиметрів. Чи може площа прямокутника дорівнювати:

1) 256 см^2; 2) 220 см^2; 3) 64 см^2;
4) 60 см^2; 5) 55 см^2; 6) 54 см^2?

§ 8. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

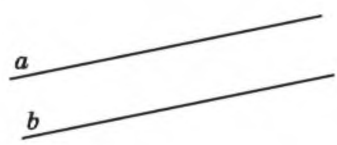
Дві прямі на площині можуть мати спільну точку (перетинатися) або не мати спільних точок (не перетинатися).

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

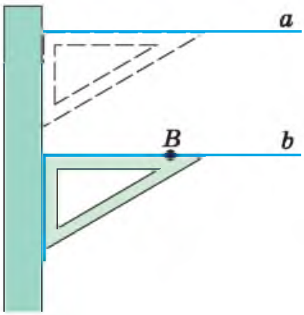
На малюнку 95 прямі a і b паралельні. Паралельність прямих записують за допомогою знака $\|$. Запис $a \parallel b$ читають так: «пряма a паралельна прямій b».

Навколо нас є багато прикладів паралельних прямих: прямолінійні ділянки шляху залізниці, горизонтальні чи вертикальні прямі зошита в клітинку, протилежні сторони рами тощо.

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський косинець і лінійку. На мал. 96 показано, як через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, паралельну прямій a.



Мал. 95



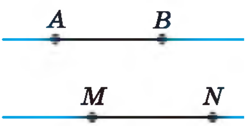
Мал. 96

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

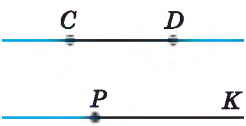
VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Цю аксіому називають ***аксіомою паралельності прямих.***

Відрізки або *промені* називають ***паралельними***, якщо вони лежать на паралельних прямих. На малюнку 97 відрізок AB паралельний відрізку MN, на малюнку 98 відрізок CD паралельний променю PK, а на малюнку 99 промінь GN паралельний променю FL. Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\parallel$.



Мал. 97



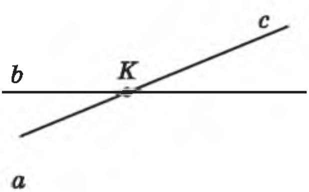
Мал. 98

Мал. 99

Задача. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Д о в е д е н н я. Нехай a і b — паралельні прямі і пряма c перетинає пряму b в точці K (мал. 100).

Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тобто $c \parallel a$. Отже, через точку K проходять дві прямі c і b, і обидві паралельні прямій a. Це суперечить аксіомі паралельності прямих.



Мал. 100

Отже, наше припущення є хибним, значить правильним є те, що пряма c перетинає пряму a. Твердження доведено. ▲

Зауважимо, що спосіб міркування, яким ми довели твердження попередньої задачі, називають *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне, тобто що a і c не перетинаються. У процесі міркувань, виходячи із цього припущення, ми прийшли до протиріччя з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення було хибним, отже, правильним є протилежне до нього припущення, тобто що пряма c перетинає пряму a.

Суть доведення від супротивного полягає в тому, що на початку доведення припускається істинність твердження, протилежного тому, що треба довести. Доведення (міркування) на основі цього припущення призводить до висновку, який суперечить або умові теореми (задачі) або деякому з істинних тверджень (аксіомі, теоремі тощо), а це означатиме, що припущення, протилежне тому, яке треба було довести, є хибним. Отже, істинним є те, що вимагалося довести.

А ще раніше...

В «Началах» Евклід деякі з аксіом називав *постулатами*. Так, зокрема, з п'ятого постулату Евкліда, який ще називають *аксіомою паралельності Евкліда*, фактично випливає, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Протягом понад двох тисячоліть вчені намагалися довести п'ятий постулат Евкліда. На початку XIX ст. три видатних учених: росіянин М.І. Лобачевський, німець К.Ф. Гаусс (1777–1855) та угорець Я. Больяй (1802–1860), – незалежно один від одного, прийшли до висновку, що довести п'ятий постулат Евкліда неможливо, оскільки він є очевидним, тобто є аксіомою.

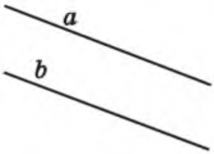
М.І. Лобачевський (1792–1856)

Микола Іванович Лобачевський пішов далі, і, замінивши аксіому паралельності на таку: «через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинають її», побудував нову геометрію — неевклідову. Її стали називати «геометрією Лобачевського».

Які прямі називають паралельними? Які інструменти використовують для побудови паралельних прямих? Сформулюйте аксіому паралельності прямих. Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

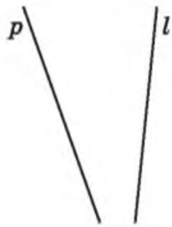
152. Запишіть з використанням символів:
1) пряма a паралельна прямій m;
2) пряма CD паралельна прямій PK.

153. На яких з малюнків 101–104 зображено паралельні прямі?

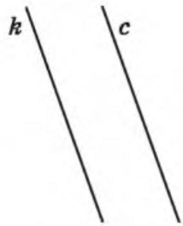


Мал. 101

Мал. 102



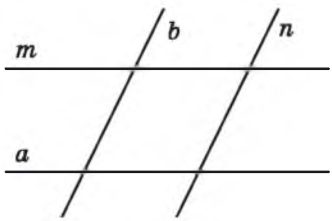
Мал. 103



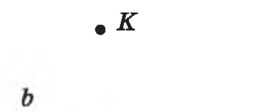
Мал. 104

154. Укажіть пари паралельних прямих на малюнку 105.

155. 1) Дано пряму b і точку K, що їй не належить (мал. 106). Скільки можна провести через точку K прямих, паралельних прямій b?
2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій b?



Мал. 105



Мал. 106

156. Проведіть пряму l і позначте точку A, що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l.

157. Позначте точку P і проведіть пряму a, що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a.

158. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD.

159. Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB.

160. 1) Накресліть кут ABC, який дорівнює 120°, та позначте точку K, що лежить у внутрішній області цього кута.

2) Через точку K за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму m, паралельну променю BA, та пряму n, паралельну променю BC.

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими m і n.

4) Зробіть висновки.

161. 1) Накресліть кут MNL, який дорівнює 50°, та позначте точку C, що належить внутрішній області цього кута.

2) Через точку C за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму a, паралельну променю NM, та пряму b, паралельну променю NL.

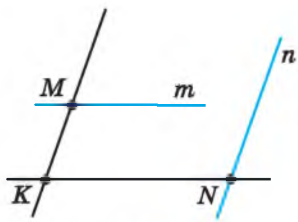
3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими a і b.

4) Зробіть висновки.

162. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a. Доведіть, що прямі m і b перетинаються.

163. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b.

164. Прямі KM і KN (мал. 107) перетинаються. Через точку M проведено пряму m, паралельну прямій KN, а через точку N проведено пряму n, паралельну прямій KM. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 107

165. Прямі a і b — паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c.

166. 1) Позначте на прямій m точки A і B та точку C, яка не належить прямій m.

2) Виміряйте відстані AB, AC і BC та порівняйте AB з $AC + BC$.

3) Зробіть висновки.

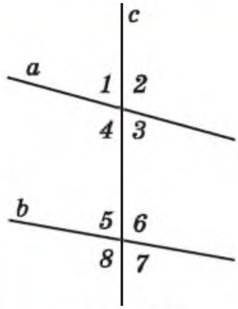
167. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, складає 25 % від іншого. Знайдіть кут між прямими.

168. Чи можна квадрат, довжина сторони якого дорівнює 2017 клітинок, розрізати на дві рівні фігури так, щоб лінії розрізів проходили по сторонах клітинок?

§ 9. КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Пряма c називається ***січною*** для прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 108).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 108. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:



Мал. 108

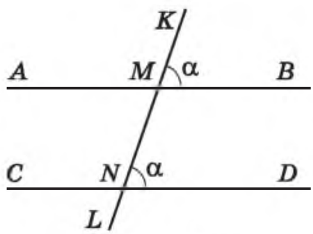
внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.

Припустимо, що в задачі необхідно встановити паралельність прямих. Виходячи з означення, це зробити неможливо, оскільки для цього прямі потрібно продовжити до нескінченності. Проте встановити, паралельні прямі чи ні, можна, використавши спеціальні теореми, які називають ознаками.

Ознака (у геометрії) — це теорема, що вказує умови, при виконанні яких можна стверджувати про певні властивості фігур, належність їх до певного класу тощо.

Розглянемо *ознаки* паралельності прямих.

Теорема (ознака паралельності прямих). **Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.**

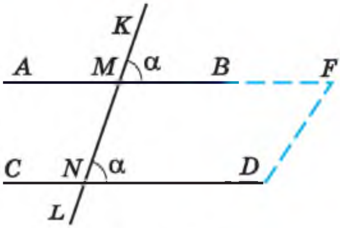


Мал. 109

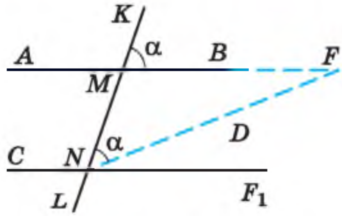
Доведення. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 109).

Доведемо теорему методом від супротивного.

Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 110). Не змінюючи міри кута KMB, перенесемо його так, щоб вершина кута — точка M — збіглася з точкою N, промінь MK збігся з променем NM, а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 111). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF, бо $F \notin NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж було встановлено, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.



Мал. 110



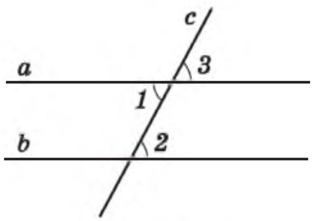
Мал. 111

Прийшли до протиріччя, бо наше припущення про те, що прямі AB і CD не паралельні, було хибним. А значить, прямі AB і CD паралельні, що й треба було довести. ▲

Н а с л і д о к 1. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути виявилися рівними, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 112).

Але кути 1 і 3 — вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Кути 2 і 3 — відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо $a \parallel b$. ▲

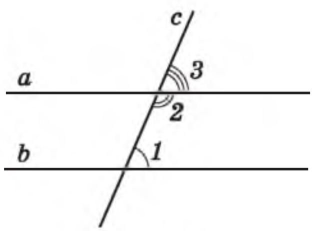


Мал. 112

Н а с л і д о к 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (мал. 113). Кути 2 і 3 — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$.

Із цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі a і b — паралельні за ознакою паралельності прямих. ▲

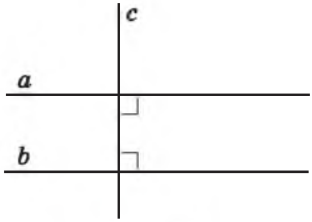


Мал. 113

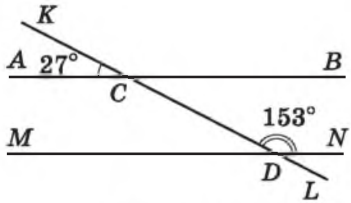
Н а с л і д о к 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

На малюнку 114: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо $a \parallel b$. ▲

Зауважимо, що наслідки 1–3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.



Мал. 114



Мал. 115

Задача. Чи паралельні прямі AB і MN на малюнку 115?

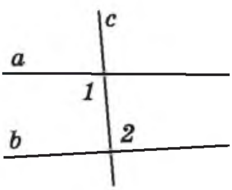
Р о з в ' я з а н н я. $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). $\angle BCD = 27°$. Оскільки $27° + 153° = 180°$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180°. Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

В і д п о в і д ь. Так.

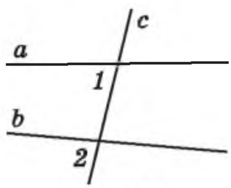
Що таке січна? ● За малюнком 108 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів. ● Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих та наслідки з неї.

169. (*Усно*) Як називаються кути *1* і *2* на малюнках 116–118?

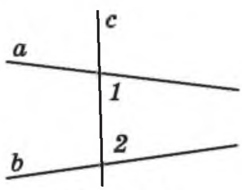
170. Запишіть, як називаються кути *1* і *2* на малюнках 119–121.



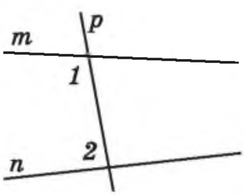
Мал. 116



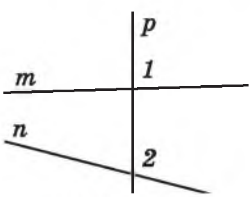
Мал. 117



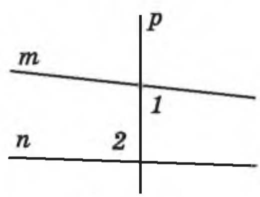
Мал. 118



Мал. 119

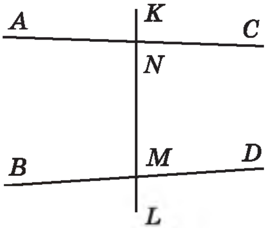


Мал. 120

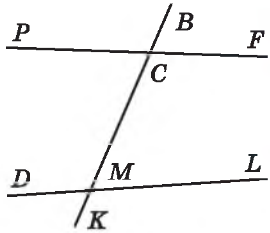


Мал. 121

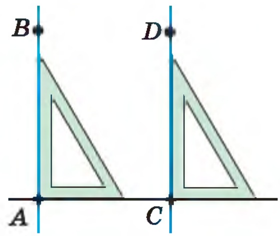
171. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 122).



Мал. 122



Мал. 123

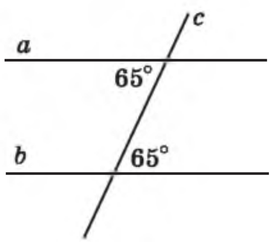


Мал. 124

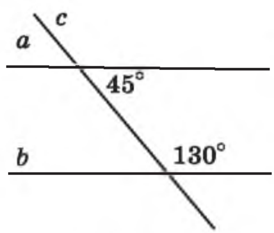
172. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 123).

173. (*Усно*) Чи паралельні прямі AB і CD на малюнку 124? Чому?

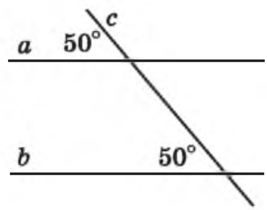
174. Якими є прямі a і b (паралельними чи такими, що перетинаються) на малюнках 125–130?



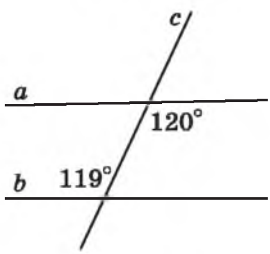
Мал. 125



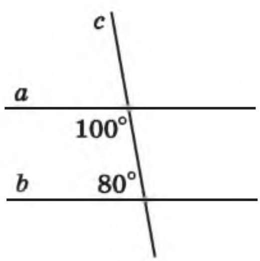
Мал. 126



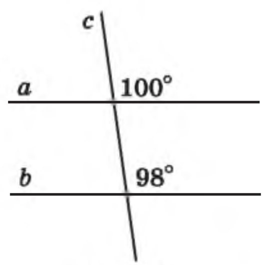
Мал. 127



Мал. 128



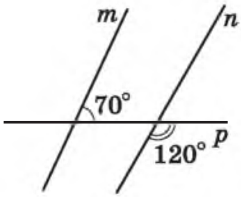
Мал. 129



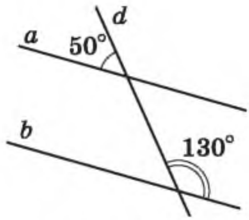
Мал. 130

175. На малюнку 131 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих m і n січною p. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі m і n?

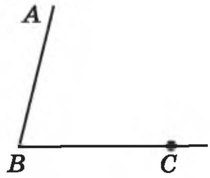
176. На малюнку 132 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих *a* і *b* січною *d*. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі *a* і *b*?



Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

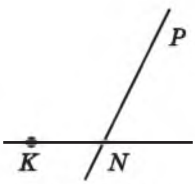
177. Доповніть малюнок 133: проведіть пряму *CM* так, щоб кути *ABC* і *BCM* були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих *AB* і *CM* та січної *BC*. Як розмістяться точки *A* і *M* відносно прямої *BC*?

178. Доповніть малюнок 134: проведіть пряму *KA* так, щоб кути *AKN* і *KNP* були внутрішніми односторонніми кутами для прямих *AK* і *PN* та січної *KN*. Як розмістяться точки *A* і *P* відносно прямої *KN*?

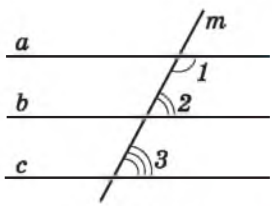
179. На малюнку 135 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 118^\circ$, $\angle 2 = 62^\circ$, $\angle 3 = 63^\circ$.

180. На малюнку 135 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 121^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$.

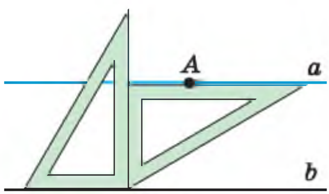
181. Через точку *A* за допомогою двох креслярських косинців провели пряму *a* (мал. 136). Чи паралельні прямі *a* і *b*? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 134



Мал. 135

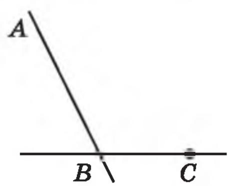


Мал. 136

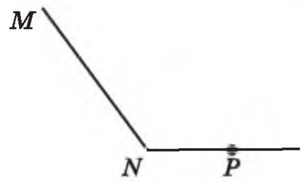
182. 1) Виміряйте $\angle ABC$ (мал. 137) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте кут *PCK*, що дорівнює куту *ABC* і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.



Мал. 137



Мал. 138

183. 1) Виміряйте $\angle MNP$ (мал. 138) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle APB$, що дорівнює куту MNP і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

184. Пряма AB перетинає пряму CD у точці A, а пряму MN — у точці B. $\angle CAB = 90°$, $\angle ABN = 90°$. Чи паралельні прямі CD і MN?

185. На малюнку 139 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $a \parallel b$.

186. На малюнку 140 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі $m \parallel n$.

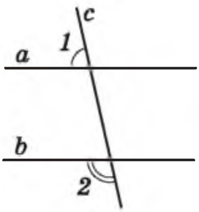
187. На малюнку 141 $\angle 4 + \angle 5 = 190°$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 3 + \angle 6$.

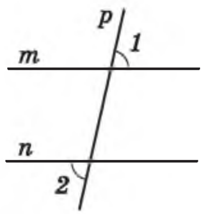
188. На малюнку 141 $\angle 3 + \angle 6 = 160°$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 4 + \angle 5$.

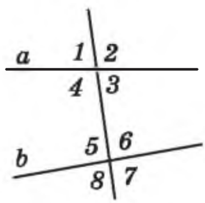
189. $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

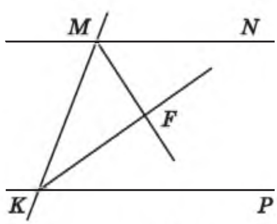
190. $\angle MNP = 60°$, $\angle NPK = 120°$. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

191. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

192. Пряма c є січною для прямих a і b. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 30°, а решта чотири — по 150°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

193. MF — бісектриса кута KMN, KF — бісектриса кута MKP (мал. 142). $\angle MKF + \angle FMK = 90°$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

194. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Пряма c перетинає пряму a. Чи перетинаються прямі b і c? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 142

195. 1) Накресліть кут ABC, який дорівнює $70°$, та позначте точку K, що належить променю BA.

2) Через точку K за допомогою косинця проведіть пряму m, перпендикулярну до променя BA, та пряму n, перпендикулярну до променя BC.

3) Користуючись транспортиром, знайдіть кут між прямими m і n.

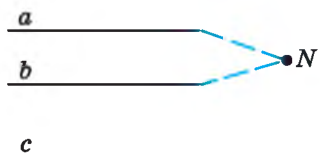
196. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC = 130°$. Знайдіть $\angle AOC$.

197. Чи можна трикутник розрізати на частини так, щоб утворилося три чотирикутники? Якщо так, то виконайте це.

§ 10. ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Розглянемо властивість паралельних прямих.

Т е о р е м а 1 (властивість паралельних прямих). **Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.**



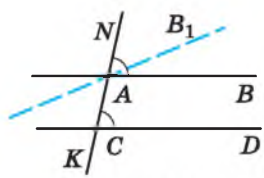
Мал. 143

Д о в е д е н н я. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці N (мал. 143). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b, що паралельні прямій c. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено. ▲

Далі розглянемо властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною.

Т е о р е м а 2 (властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною). **Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні.**



Мал. 144

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі AB і CD перетинає січна NK (мал. 144). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою і $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1, паралельні прямій CD, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним і тому відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні: $\angle NAB = \angle ACD$. Теорему доведено. ▲

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема містить умову і висновок. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то одержимо нове твердження (правильне або неправильне), умовою якого буде висновок даної теореми, а висновком — її умова. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають теоремою, оберненою до даної, а дану теорему — прямою.

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком — друга частина: «прямі паралельні» (це треба довести). Бачимо, що остання розглянута нами теорема і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок — «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні» (це треба довести).

Не для кожної теореми буде справедливою і обернена теорема. Наприклад, для теореми про властивість вертикальних кутів не існує оберненої, оскільки твердження: «якщо два кути рівні, то вони вертикальні» — неправильне.

Систематизуємо викладене вище в таблиці.

Частина твердження (теореми)	Ознака паралельності прямих (*пряма теорема*)	Властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (*обернена теорема*)
Умова	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні	Прямі паралельні
Висновок	Прямі паралельні	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні

Розглянемо наслідки з теореми 2.

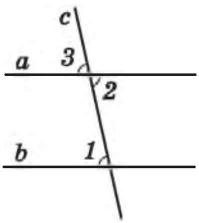
Н а с л і д о к 1 (властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). **Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.**

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 145). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад *1* і *2*, рівні.

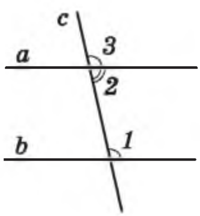
Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути *1* і *3* рівні. Кути *2* і *3* рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Н а с л і д о к 2 (властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). **Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.**

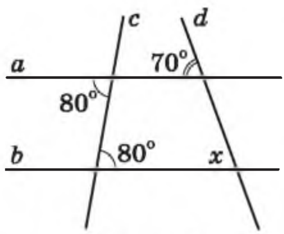
Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 146). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад *1* і *2*, дорівнює 180°.



Мал. 145



Мал. 146



Мал. 147

Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути *1* і *3* рівні. Кути *2* і *3* — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ▲

Теорему 2 та наслідки з неї також можна розглядати як *властивості паралельних прямих*.

Задача. Знайдіть невідомий кут x за малюнком 147.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b, рівні (обидва по 80°), то $a \parallel b$. Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b, рівні. Тому $x = 70°$.

В і д п о в і д ь. 70°.

Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, та наслідки з неї. Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

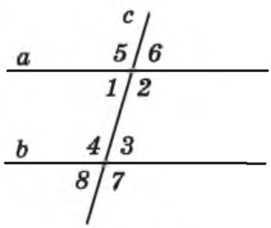
1 **198.** (*Усно*) На малюнку 148 $a \parallel b$, c — січна.
1) Чи рівні між собою кути *5* і *4*; *2* і *7*?
2) Чи рівні між собою кути *1* і *3*?
3) Обчисліть суму кутів *1* і *4*.

199. На малюнку 148 прямі a і b паралельні, c — січна.
1) Чи рівні між собою кути *1* і *8*; *6* і *3*?
2) Чи рівні між собою кути *2* і *4*?
3) Обчисліть суму кутів *2* і *3*.

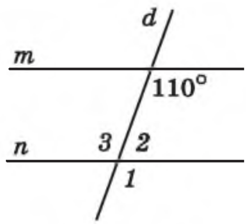
200. $m \parallel n$, d — січна (мал. 149). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

201. $m \parallel n$, d — січна (мал. 150). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

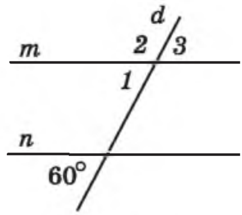
2 **202.** Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 140°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.



Мал. 148



Мал. 149



Мал. 150

203. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть інші сім кутів.

204. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:
1) 133°; 2) 143°; 3) 153°?

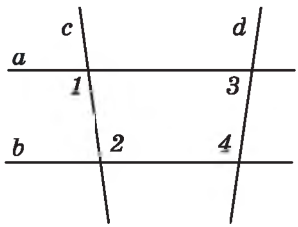
205. Дано паралельні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з прямих. Через точку M паралельно до прямої a проведено пряму m. Чи паралельні прямі b і m?

206. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їх сума дорівнює 240°.

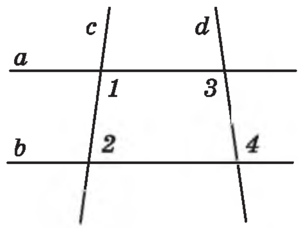
207. Сума двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108°. Знайдіть ці кути.

208. На малюнку 151 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

209. На малюнку 152 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.



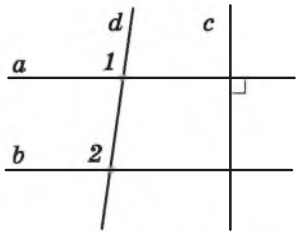
Мал. 151



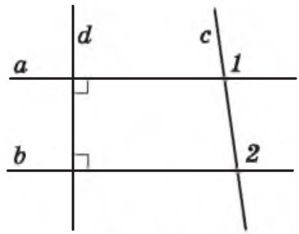
Мал. 152

210. На малюнку 153 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

211. На малюнку 154 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 153



Мал. 154

212. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них на 16° більший за другий;

2) один з них утричі менший за другий;

3) їх градусні міри відносяться як 5 : 7.

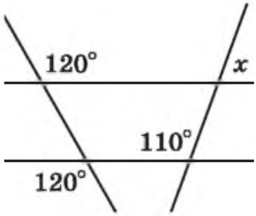
213. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них у 4 рази більший за другий;

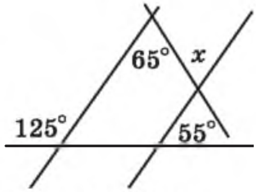
2) один з них на 8° менший за другий;

3) їх градусні міри відносяться як 5 : 4.

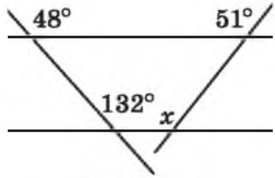
214. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 155–157.



Мал. 155

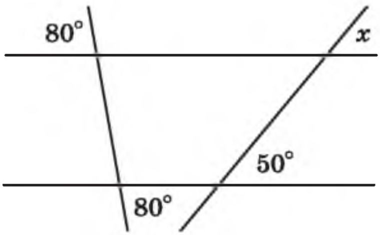


Мал. 156

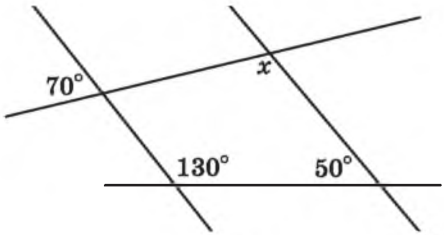


Мал. 157

215. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 158, 159.



Мал. 158



Мал. 159

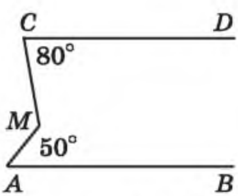
216. Прямі a і b не паралельні прямій m. Чи можна зробити висновок, що прямі a і b не паралельні між собою?

217. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 120°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

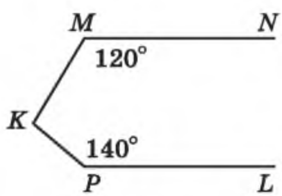
218. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 128°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

219. На малюнку 160 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle CMA$.

220. На малюнку 161 $MN \parallel PL$. Знайдіть $\angle MKP$.



Мал. 160



Мал. 161

221. Доведіть, що бісектриси пари внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

222. Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

223. Накресліть відрізок AB, промінь CD та пряму a так, щоб відрізок AB був перпендикулярним до променя CD, але не перетинав його, а промінь CD був паралельним прямій a.

224. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та знайдіть прізвище видатного українського письменника.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 16 см. Знайдіть відрізки AC і BC, якщо:	AC	BC
AC більший за BC на 2 см	Н	А
AC більший за BC утричі	О	Ф
$AC : BC = 5 : 3$	К	Р

4 см	6 см	7 см	9 см	10 см	12 см

225. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (мал. 162) чотири відрізки.

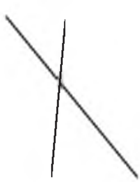
Мал. 162

Домашня самостійна робота № 2 (§7—§10)

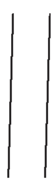
Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), *серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.*

1. На якому з малюнків 163–166 зображено перпендикулярні прямі?

А) мал. 163; **Б)** мал. 164; **В)** мал. 165; **Г)** мал. 166.



Мал. 163



Мал. 164

Мал. 165

Мал. 166

2. Укажіть, на якому з малюнків 163–166 зображено паралельні прямі:

А) мал. 163; Б) мал. 164; В) мал. 165; Г) мал. 166.

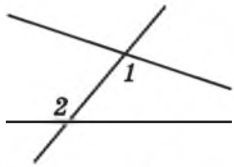
3. Як називають кути *1* і *2* на малюнку 167?

А) внутрішні односторонні;

Б) відповідні;

В) вертикальні;

Г) внутрішні різносторонні.



Мал. 167

4. Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним:

А) перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;

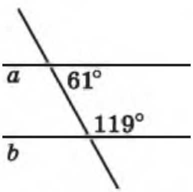
Б) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;

В) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;

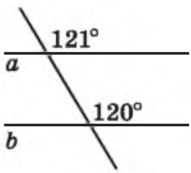
Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.

5. На якому з малюнків 168–171 прямі a і b паралельні?

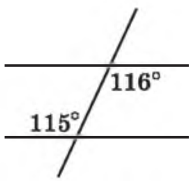
А) мал. 168; Б) мал. 169; В) мал. 170; Г) мал. 171.



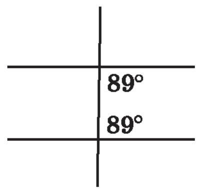
Мал. 168



Мал. 169



Мал. 170



Мал. 171

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35°. Якою може бути градусна міра одного з інших семи кутів?

А) 50°; Б) 105°; В) 145°; Г) 55°.

7. Прямі AB і CD перпендикулярні та перетинаються в точці O. У внутрішній області кута AOD взято точку M так, що $\angle MOD = 20°$. Пряма MN проходить через точку O. Знайдіть градусну міру кута AON.

А) 20°; Б) 70°; В) 110°; Г) 160°.

8. На малюнку 172 $\angle 2 + \angle 3 = 175°$. Знайдіть $\angle 1 + \angle 4$.

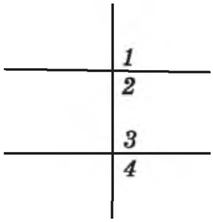
А) 195°; Б) 185°; В) 175°; Г) 165°.

9. За малюнком 173 знайдіть градусну міру кута x.

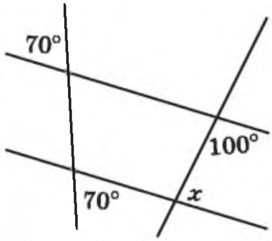
А) 80°; Б) 70°; В) 100°; Г) 110°.

10. На малюнку 174 $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COK = \angle DOK$. Знайдіть, якщо це можливо, градусну міру кута AOK.

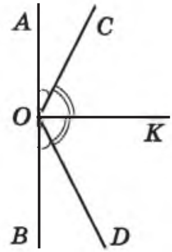
А) знайти неможливо;
Б) 80°;
В) 90°;
Г) 100°.



Мал. 172



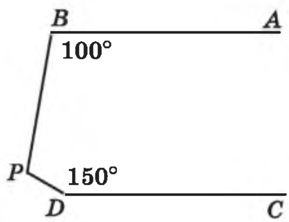
Мал. 173



Мал. 174

11. Прямі AB і CD паралельні (мал. 175). Тоді BPD = ...

А) 100°;
Б) 110°;
В) 130°;
Г) 150°.



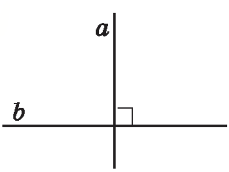
Мал. 175

12. Один із двох даних кутів на 60° більший за другий, а суміжні з ними кути відносяться як 5 : 8. Знайдіть менший з даних кутів.

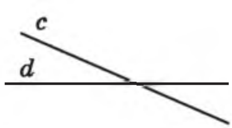
А) 60°;
Б) 80°;
В) 40°;
Г) 20°.

Завдання для перевірки знань № 2 (§ 7—§ 10)

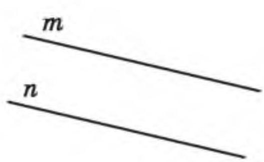
1. На якому з малюнків 176–178 зображено паралельні прямі, а на якому — перпендикулярні? Виконайте відповідні записи.



Мал. 176



Мал. 177



Мал. 178

2. Накресліть пряму a та позначте точку N, яка їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку N проведіть:

1) пряму b, перпендикулярну до прямої a;

2) пряму c, перпендикулярну до прямої b.

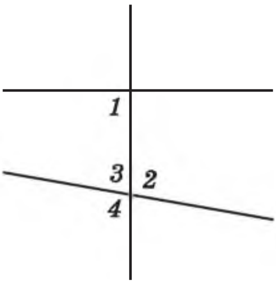
3. За малюнком 179 укажіть, як називають пару кутів:

1) *1* і *2*; 2) *1* і *3*; 3) *1* і *4*?

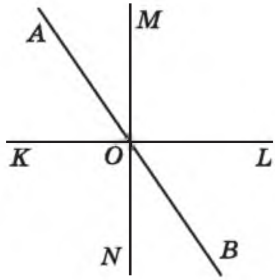
4. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 180). Чи перпендикулярні прямі KL і MN, якщо

1) $\angle KOA = 70°$, $\angle AOM = 19°$;

2) $\angle NOB = 21°$, $\angle KOB = 111°$?



Мал. 179



Мал. 180

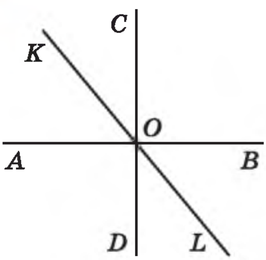
5. Накресліть промені AB і CD та відрізок MN так, щоб промінь AB був паралельний відрізку MN і перпендикулярний до променя CD.

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

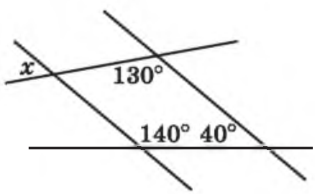
7. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 181). Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle DOL = 38°$.

8. За малюнком 182 знайдіть градусну міру кута x.

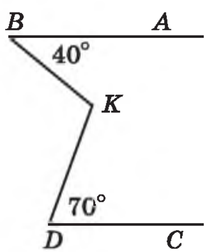
9. На малюнку 183 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle BKD$.



Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183

Додаткові вправи

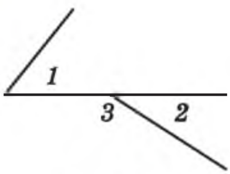
10. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них у 4 рази більший за другий.

11. Пряма m є січною для прямих c і d. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 50°, а решта — по 130°. Чи можна стверджувати, що прямі c і d між собою паралельні?

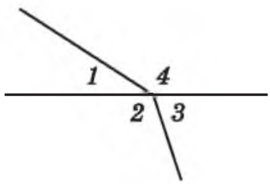
Вправи для повторення розділу 2

До § 5

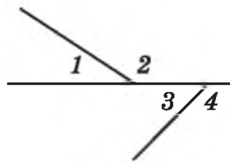
226. Серед кутів, які зображено на малюнках 184–186, укажіть ті, що є суміжними.



Мал. 184



Мал. 185



Мал. 186

227. 1) Чи можна, використовуючи лише олівець та лінійку, побудувати кут, суміжний з даним?
2) Скільки таких кутів можна побудувати?

228. Кут ABC менший від кута MNP. У якого з кутів буде більшим суміжний кут? Відповідь обґрунтуйте.

229. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 7.

230. Один із суміжних кутів складає 20 % від іншого. Знайдіть ці кути.

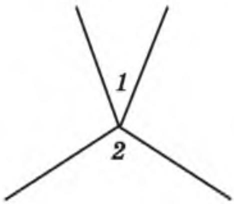
231. Один із суміжних кутів на 20 % менший від іншого. Знайдіть ці кути.

232. Бісектриса кута ABC утворює зі стороною кут, удвічі більший за кут, суміжний з кутом ABC. Знайдіть $\angle ABC$.

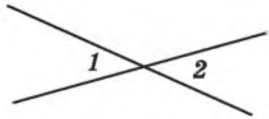
До § 6

233. Який предмет домашнього вжитку дає уявлення про вертикальні кути?

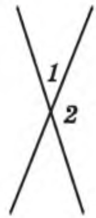
234. Чи є кути *1* і *2* вертикальними (мал. 187–191)?



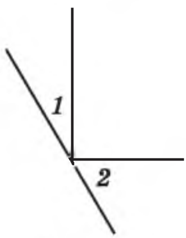
Мал. 187



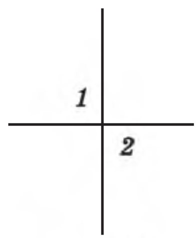
Мал. 188



Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191

235. Чи є правильними твердження:

1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;
2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;
3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один вертикальний кут;
4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один суміжний кут?

236. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

1) $5°$ і $175°$; 2) $15°$ і $19°$; 3) $27°$ і $154°$; 4) $3°$ і $3°$?

237. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на $48°$ більший за інший. Знайдіть кут між прямими.

238. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

239. Знайдіть градусну міру кожного із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

1) менша від суми двох інших у 4 рази;
2) більша за суму двох інших на $160°$.

240. Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, у 8 разів менший від суми трьох інших кутів.

До § 7

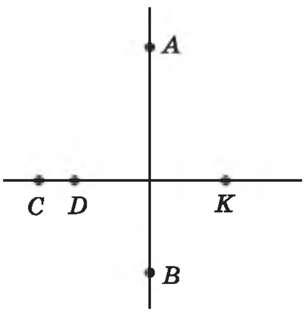
241. Накресліть пряму *a* та позначте точку *M*, що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки проведіть з точки *M* перпендикуляр до прямої *a*. Виміряйте відстань від точки *M* до прямої *a*.

242. Накресліть гострий кут *KAM*, позначте на стороні *AK* точку *B*. Побудуйте за допомогою косинця і лінійки пряму, що проходить через точку *B* перпендикулярно до *AK*.

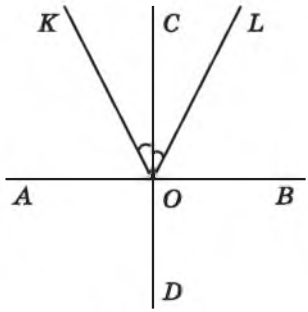
243. Накресліть промінь *AB* і відрізок *KP* так, щоб вони були перпендикулярними і не перетиналися.

244. Назвіть усі пари перпендикулярних між собою відрізків на малюнку 192. Виконайте відповідні записи.

245. На малюнку 193: $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.
1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOB$?
2) Порівняйте $\angle KOB$ і $\angle AOK$.



Мал. 192



Мал. 193

246. 1) Чи можуть два гострих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — перпендикулярні між собою?
2) Чи можуть два тупих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — перпендикулярні між собою?

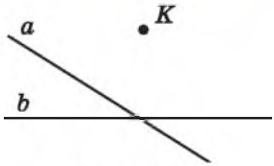
247. Як, використовуючи шаблон кута в 6°, побудувати взаємно перпендикулярні прямі?

248. Доведіть, що коли бісектриси кутів *ABC* і *CBD* взаємно перпендикулярні, то точки *A*, *B* і *D* лежать на одній прямій.

До § 8

249. Накресліть відрізки *AB* і *CD* так, щоб вони були паралельними між собою.

250. На малюнку 194 зображено дві прямі a і b, що перетинаються, та точку K, що не належить жодній з них. Проведіть через точку K прямі, паралельні прямим a і b.



Мал. 194

251. 1) Прямі a і b не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони між собою паралельні?

2) Відрізки AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

3) Промені MN і KL не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

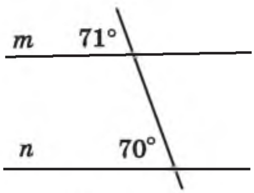
252. Дано пряму a і точку K, що їй не належить. Через точку K провели дві прямі b і c. Як можуть розміщуватися ці прямі відносно прямої a? Розгляньте всі випадки та виконайте до них малюнки.

253. Прямі a і b — паралельні, а прямі b і n — перетинаються. Пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що пряма c перетинає пряму n і паралельна прямій a.

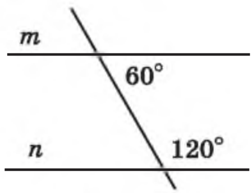
До § 9

254. Накресліть дві прямі та їх січну. Пронумеруйте кути, що утворилися, числами від 1 до 8. Які із цих кутів будуть внутрішніми односторонніми, які — внутрішніми різносторонніми, а які — відповідними?

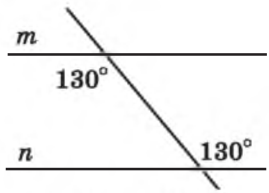
255. Чи є прямі m і n паралельними на малюнках 195–198?



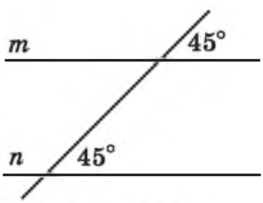
Мал. 195



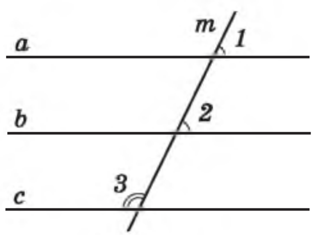
Мал. 196



Мал. 197



Мал. 198



Мал. 199

256. При перетині прямих a і b січною c утворилося два рівних гострих кути. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?

257. На малюнку 199 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Чи є прямі a і c паралельними між собою?

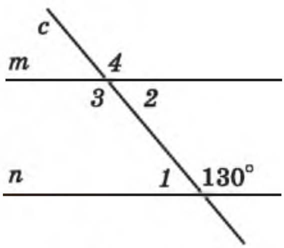
До § 10

258. На малюнку 200 прямі m і n — паралельні, c — січна. Знайдіть градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

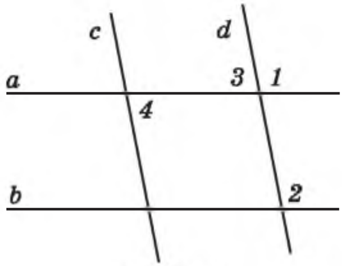
259. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.

260. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них складає 80 % від другого.

261. На малюнку 201 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100°$. Знайдіть градусні міри кутів 2, 3, 4.



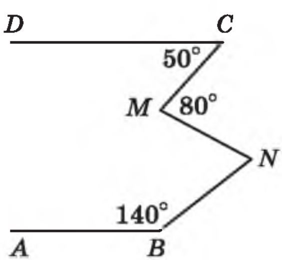
Мал. 200



Мал. 201

262. Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

263. Прямі AB і CD паралельні (мал. 202). Знайдіть $\angle MNB$.



Мал. 202

Михайло Кравчук — відомий у світі й незнаний в Україні

Вислів «Рукописи не горять!», на щастя, іноді справджується... У селі Саварка, що на Богуславщині, на горищі хатини, у якій у 20-ті роки XX ст. мешкали вчителі, через 80 років випадково віднайшли мішок, наповнений паперами й книжками... Пожовклі зшитки зошитів виявилися конспектами учителів, які працювали в Саварській школі на початку минулого століття. І серед них — рукописний підручник Михайла Кравчука!

96 аркушів густо списаного зошита, на першій сторінці якого напис: «Геометрія для семирічних трудових шкіл, 1920 рік», виявилися сторінками неопублікованого підручника генія української математики!

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик XX ст., всесвітньо відомий учений, педагог, громадський діяч, дійсний член Всеукраїнської академії наук, учений світової слави. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці, але світ не знав лише, що він — українець. Його наукові праці з різних галузей математики увічнилися в безцінній скарбниці світової науки. Творець першого у світі електронного цифрового комп'ютера — американський фізик Джон Вінсент Атанасов під час розробки свого творіння щедро користався теоретичними напрацюваннями Михайла Кравчука, засвідчивши таким чином — наш співвітчизник заслужено належить до співзасновників ЕОМ (електронно-обчислювальної машини). Теоретичні розробки М. Кравчука були використані й під час формування перших мереж телебачення у США та Японії.

Народився Михайло Кравчук у селі Човниця на Волині в родині землеміра й учительки. Після закінчення чоловічої гімназії з 1910 по 1914 рік навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Університету Святого Володимира в Києві (нині — Київський національний університет імені Тараса Шевченка). Викладачі одразу вирізнили його з-поміж інших за парадоксальність мислення. Академік Д. Граве, який створив алгебраїчну школу, давав молодому вченому чудові рекомендації, вважав його одним з найталановитіших своїх учнів і просив залишитися при університеті професорським стипендіатом для підготовки до наукової та викладацької роботи. Вільні від студіювання вечори Михайло проводив в Українському клубі, у Народному домі на Лук'янівці, де ставив свої вистави український театр під керівництвом М. Старицького.

Після отримання звання приват-доцента Михайло Кравчук працює як математик-науковець і як педагог. Викладає у двох новостворених українських гімназіях та Українському народному університеті, з 1918-го — співробітник Української академії наук. Кажуть, що в Кравчука була така красива й милозвучна українська мова, що на його математичні лекції із захопленням приходили й філологи — слухати неймовірну вимову викладача. Лекції відзначалися великим багатством і глибиною змісту, логікою й чіткістю викладу, широтою охоплення матеріалу, особливою красою та витонченістю викладу. Водночас найскладніші математичні положення Михайло Пилипович подавав дохідливо й зрозуміло, але не в спрощеній формі. На лекціях Кравчука ніколи не було вільних місць: слухати його приходили ще й біологи, хіміки, філософи... Він перший в Україні почав писати математичні праці українською мовою. Підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під головуванням Кравчука створила й перший тритомний математичний словник.

Михайло Пилипович підготував кілька підручників українською мовою з математики. У 1919 р. вийшов друком його курс лекцій з геометрії, який він прочитав в Українському народному університеті. У тому ж році опубліковано перший переклад українською мовою широковідомого підручника з геометрії Кисельова, здійснений Кравчуком.

Економічна руйнація початку 20-х років примусила науковця виїхати в село Саварка Богуславського району на Київщині, де він став директором школи. Тут М. Кравчук мав можливість реально втілити свої педагогічні задуми. Крім безпосереднього навчання, Кравчук приділяв велику увагу виявленню та вихованню обдарованих учнів. Він навчав математики **Архипа Люльку** (автора-конструктора першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна, творця літаків з надзвуковою швидкістю), а пізніше — **Сергія Корольова** (ученого-конструктора, основоположника радянської космонавтики), **Володимира Челомея** (провідного творця радянського «ядерного щита», конструктора ракетно-космічної й авіаційної техніки, розробника перших супутників).

М. Кравчука запрошують до роботи у Всеукраїнську академію педагогічних наук (ВУАН), де він очолює комісію математичної статистики, обіймає посаду вченого секретаря президії Академії, завідує відділом математичної статистики Інституту математики ВУАН. Водночас він — член управи Київського інституту народної освіти, декан факультету професійної освіти, активний громадський діяч — член секції наукових працівників міської Ради, організатор першої в Україні **математичної олімпіади** для обдарованих школярів (1935 р.).

Добре володіючи п'ятьма мовами (французькою, німецькою, італійською, польською й російською), молодий учений листувався з колегами з різних країн. М. Кравчук був обраний членом математичних товариств Франції, Німеччини, Італії. Але в сумнозвісному 1937 році в тодішній газеті «Комуніст» з'явилася наклепницька стаття «Академік Кравчук підтримує ворогів народу». Йому дорікали листуванням з львівськими вченими, націоналізмом. У 1938 році М. Кравчука заарештували, інкримінувавши йому «вбивчий» на той час набір контрреволюційних стереотипів: націоналіст, шпигун. Суд над Михайлом Кравчуком тривав усього 30 хвилин, але вирок — 20 років тюремного ув'язнення та 5 років заслання. В останньому слові на суді М. Кравчук просив дати йому можливість закінчити розпочату працю з математики.

Незважаючи на хворе серце та повністю підірване у в'язниці здоров'я, М. Кравчук і вдень, і вночі невтомно займався наукою. Своєї реабілітації учений не дочекався. Його було посмертно реабілітовано лише в 1956 р., а в 1992 р. поновлено у складі дійсних членів Академії наук України.

Його спадок налічує понад 180 наукових праць. Його пам'ять вшановують й нині.

У 1987 р. у с. Човниця, на батьківщині академіка, було встановлено його погруддя та відкрито музей М. Кравчука.

У 2003 р. на території Політехнічного інституту в Києві, вперше в Україні, відкрито пам'ятник Михайлові Кравчуку. «Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на постаменті пам'ятника. Щороку в цьому навчальному закладі проводяться конференції імені академіка Кравчука, засновано стипендію М. Кравчука для кращих студентів.

У 2009 р. в Києві, на Харківському житловому масиві, одну з нових вулиць було названо на честь Михайла Кравчука.

Ім'я математика присвоєно Луцькій гімназії № 21, що знаходиться на вулиці академіка Кравчука, де також, до 110-річчя від дня народження, було відкрито музей видатного вченого.

У 2012 р. Національний банк України ввів в обіг пам'ятну монету номіналом 2 гривні, присвячену М.П. Кравчуку.

Уже в XXI столітті ЮНЕСКО внесла ім'я М.П. Кравчука до переліку найвизначніших людей планети.

А чи зможете ви розв'язати геометричні задачі Київських міських олімпіад з математики, що пропонувалися в ті часи?

1. (1950 р.) Розділіть прямокутник розміром 18×8 на дві частини так, щоб з них можна було утворити квадрат.

2. (1975 р.) У деякій країні 1000 доріг з'єднують 200 міст, причому з кожного міста виходить хоча б по одній дорозі. Яку найбільшу кількість доріг можна одночасно закрити на ремонт, не порушуючи при цьому зв'язок між містами?

Відповідь. 801.

3. (1978 р.) Точки A, B, C розташовані так, що незалежно від вибору точки M відрізок AM коротший від одного з відрізків BM або CM. Доведіть, що точка M належить відрізку BC.

4. (1979 р.) Розмістіть 6 точок на площині так, щоб кожні 3 з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

5. (1985 р.) Довільний трикутник розріжте на 3 частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.

6. (1987 р.) Чи можна квадрат розміром 6×6 розрізати на прямокутники розміром 1×4?

Розділ 3 ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

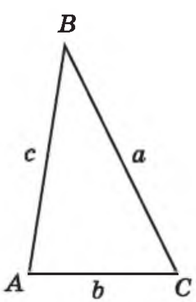
- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів та види трикутників;
- **дізнаєтеся** про висоту, медіану і бісектрису трикутника, нерівність трикутника та співвідношення між сторонами і кутами трикутника; суму кутів трикутника;
- **навчитеся** доводити рівність трикутників на основі ознак; застосовувати властивість рівнобедреного та прямокутного трикутників до розв'язування задач.

§ 11. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Позначимо три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (мал. 203).

Трикутником **називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.**

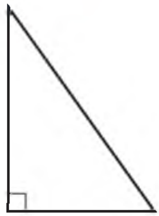
Точки називають ***вершинами*** трикутника, а відрізки — його ***сторонами***. На мал. 203 зображено трикутник ABC. Його вершинами є точки A, B і C, а сторонами — відрізки AB, BC і CA. Замість слова «трикутник» в математиці можна вживати символ $\triangle$, тоді запис $\triangle ABC$ читають так: «трикутник ABC». Назва трикутника складається з букв, якими позначено його вершини, і записувати їх можна в будь-якому порядку: $\triangle ACB$; $\triangle BCA$; $\triangle CAB$ тощо.



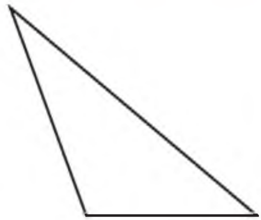
Мал. 203

Кутами трикутника ABC називають кути BAC, ABC і BCA. Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати лише їх вершиною: однією буквою $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту a, b і c відповідно до позначення протилежних їм вершин.

Мал. 204



Мал. 205



Мал. 206

Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають *елементами трикутника*.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою P, наприклад, периметр трикутника ABC можна позначити так: $P_{\triangle ABC}$. Маємо:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA.$$

Задача. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша за другу і вдвічі менша за третю. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої — $(x + 7)$ см, а третьої — $2x$ см. Оскільки $P_{\triangle} = 47$ см, маємо рівняння:

$$x + (x + 7) + 2x = 47.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої — 17 см, третьої — 20 см.

В і д п о в і д ь. 10 см, 17 см, 20 см.

Залежно від величини кутів розрізняють такі *види трикутників*: ***гострокутні***, ***прямокутні***, ***тупокутні***. Гострокутні трикутники — це ті, у яких усі кути гострі (мал. 204), прямокутні — це ті, що мають прямий кут (мал. 205), тупокутні — це ті, що мають тупий кут (мал. 206).

А ще раніше...

Трикутник вважався найпростішою замкненою прямолінійною фігурою. Властивості цієї фігури людство вивчало та використовувало у практичній діяльності ще з давніх-давен.

Так, наприклад, у будівництві здавна використовують властивість жорсткості трикутника для укріплення різноманітних будівель, конструкцій тощо.

Зображення трикутників і задач, пов'язаних із трикутниками, дослідники знаходили в єгипетських папірусах, стародавніх індійських книгах, інших документах давнини.

У Давній Греції ще в VII ст. до н.е. були відомі деякі важливі факти, пов'язані з трикутником. Так, наприклад, Фалес довів, що трикутник можна однозначно задати стороною і двома прилеглими до неї кутами.

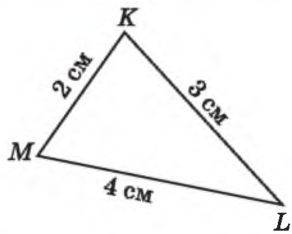
Найповніше вчення про трикутники виклав Евклід у першій книжці «Основ».

Яку фігуру називають трикутником? Що називають вершинами трикутника, сторонами трикутника, кутами трикутника? Що називають периметром трикутника? Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?

264. (*Усно*) За малюнком 207 знайдіть периметр трикутника KLM.

265. (*Усно*) На якому з малюнків 208–210 три точки можуть бути вершинами трикутника, а на якому — ні?

266. Накресліть трикутник і позначте його вершини буквами A, M і N. Назвіть сторони і кути цього трикутника. Виконайте відповідні записи.

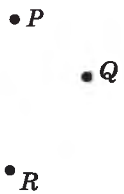


Мал. 207

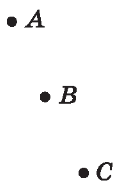
267. Накресліть трикутник PKL. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

268. Знайдіть периметр трикутника зі сторонами 25 мм, 3,2 см, 0,4 дм.

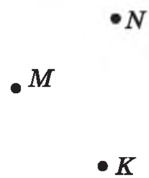
269. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 4,3 см, 29 мм, 0,3 дм.



Мал. 208



Мал. 209



Мал. 210

270. Накресліть гострокутний трикутник ABC. Виміряйте його сторони та знайдіть його периметр.

271. Накресліть тупокутний трикутник, вершинами якого є точки P, L і K. Виміряйте сторони цього трикутника та знайдіть його периметр.

272. Одна сторона трикутника втричі менша за другу і на 7 см менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

273. Одна сторона трикутника на 2 дм більша за другу і в 1,5 раза менша за третю сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 40 дм.

274. Використовуючи лінійку з поділками та транспортир, побудуйте трикутник ABC, у якого $\angle A = 60°$, $AB = 3$ см, $AC = 7$ см.

275. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та косинця трикутник PKL, у якого $\angle P = 90°$, $PK = 3$ см, $PL = 4$ см. Як називають такий трикутник? Виміряйте довжину сторони KL.

276. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 6, а периметр трикутника дорівнює 52 дм.

277. Периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

278. Укажіть, скількома способами можна назвати трикутник з вершинами в точках M, N і K. Запишіть усі ці назви.

279. Сума першої і другої сторін трикутника дорівнює 11 см, другої і третьої — 14 см, а першої і третьої — 13 см. Знайдіть периметр трикутника.

280. Накресліть відрізок AB завдовжки 2 см 7 мм. Накресліть відрізок PL, що дорівнює відрізку AB.

281. Який кут утворює бісектриса кута 78° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

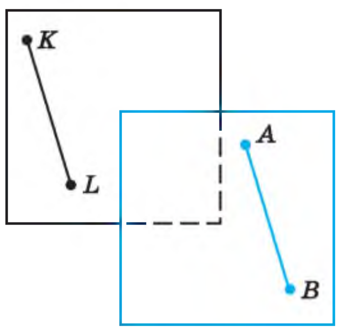
282. Скільки чотирикутників у п'ятикутній зірці (мал. 211)?

Мал. 211

§ 12. *РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР*

Нагадаємо, що два відрізки називають рівними, якщо вони мають однакову довжину, а два кути називають рівними, якщо вони мають однакову градусну міру.

Розглянемо два рівних відрізки AB та KL, довжина кожного з яких 2 см (мал. 212). Уявімо, наприклад, що відрізок AB накреслено на прозорій плівці. Переміщуючи плівку, відрізок AB можна сумістити з відрізком KL. Отже, рівні відрізки AB і KL можна *сумістити накладанням*.

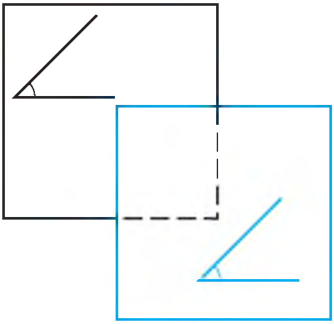


Мал. 212

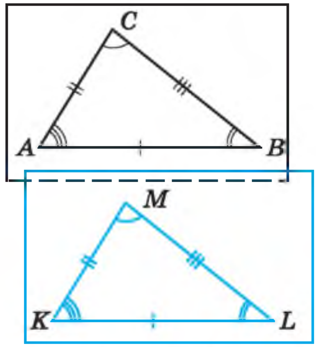
Так само можна сумістити накладанням два рівних кути (мал. 213). Таким чином, приходимо до загального означення рівних фігур:

геометричні фігури називають *рівними*, якщо їх можна сумістити накладанням.

Зауважимо, що це означення не суперечить означенням рівних відрізків і рівних кутів, які ви вже знаєте.



Мал. 213



Мал. 214

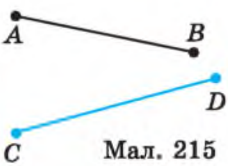
Тепер звернемо увагу на питання рівності трикутників. На малюнку 214 зображено рівні трикутники ABC і KLM. Кожний з них можна накласти на інший так, що вони збігатимуться. При цьому попарно сумістяться їх вершини A і K, B і L, C і M, а отже, і їх сторони AB і KL, AC і KM, BC і LM та кути A і K, B і L, C і M. Таким чином, якщо трикутники рівні, то елементи (тобто сторони і кути) одного трикутника відповідно дорівнюють елементам другого трикутника: $AB = KL$, $AC = KM$, $BC = LM$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$.

Для позначення рівності трикутників використовують звичайний знак рівності: $\triangle ABC = \triangle KLM$. Зауважимо, що **у такій рівності має значення послідовність запису вершин трикутника**. Запис $\triangle ABC = \triangle KLM$ означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, а запис $\triangle ABC = \triangle LKM$ — інше: $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle M$.

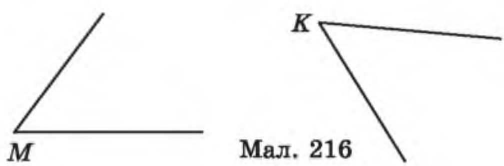
Які геометричні фігури називають рівними? Рівність яких елементів трикутника можна встановити, виходячи з того, що $\triangle ABC = \triangle KLM$?

283. 1) Виміряйте довжини відрізків AB і CD на малюнку 215 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути M і K на малюнку 216 та встановіть, чи рівні вони.



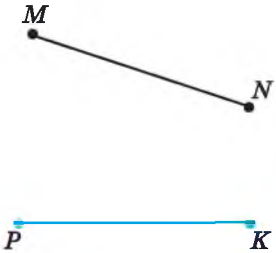
Мал. 215



Мал. 216

284. 1) Виміряйте довжини відрізків MN і PK на малюнку 217 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути A і B на малюнку 218 та встановіть, чи рівні вони.



Мал. 217

Мал. 218

285. (*Усно*) 1) Чи можна сумістити накладанням відрізки AK і MF, якщо AK = 1,5 см, а MF = 15 мм?

2) Чи можна сумістити накладанням кути, градусні міри яких дорівнюють 25° і 32°?

286. Дано: $\triangle ABC = \triangle MPL$. Доповніть записи:

1) $\angle A = ...$; 2) $\angle B = ...$; 3) $\angle C = ...$.

287. Дано: $\triangle MPT = \triangle DCK$. Доповніть записи:

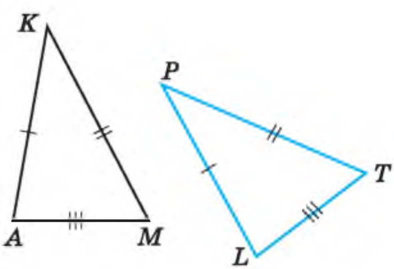
1) $MP = ...$; 2) $PT = ...$; 3) $MT = ...$.

288. На малюнку 219 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

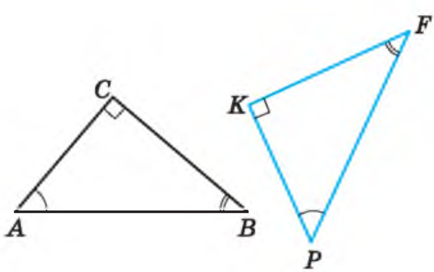
1) $\triangle AKM = ...$; 2) $\triangle MAK = ...$.

289. На малюнку 220 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle ABC = ...$; 2) $\triangle CAB = ...$.



Мал. 219



Мал. 220

290. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KLP$, $AB = 5$ см, $LP = 9$ см, $AC = 8$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KLP.

291. Відомо, що $\triangle PMT = \triangle DCF$, $\angle P = 42°$, $\angle C = 91°$, $\angle T = 47°$. Знайдіть невідомі кути трикутників PMT і DCF.

292. 1) Периметри двох трикутників рівні. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

2) Периметр одного трикутника більший за периметр другого. Чи можуть ці трикутники бути рівними?

293. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CBA$. Чи є у трикутника ABC рівні сторони? Якщо так, назвіть їх.

294. Відомо, що $\triangle MNK = \triangle MKN$. Чи є у трикутника MNK рівні кути? Якщо так, назвіть їх.

295. Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см.

296. Дано: $\triangle PKL = \triangle KLP$. Знайдіть PK, якщо периметр трикутника PKL дорівнює 24 см.

297. На прямій позначено вісім точок так, що відстань між кожними двома сусідніми точками — однакова. Відстань між крайніми точками дорівнює 112 см. Знайдіть відстань між двома сусідніми точками.

298. Розгорнутий кут поділили променями на три таких кути, один з яких удвічі менший за другий і втричі менший за третій. Знайдіть градусні міри цих трьох кутів.

299. Розріжте прямокутник, одна сторона якого дорівнює 3 клітинки, а друга — 9 клітинок, на вісім квадратів так, щоб розрізи проходили по сторонах клітинок.

§ 13. ПЕРША ТА ДРУГА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їх елементи. Це важливо для практики, наприклад для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну.

Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

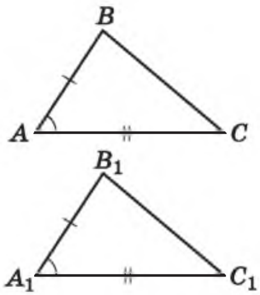
Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників). **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 221).

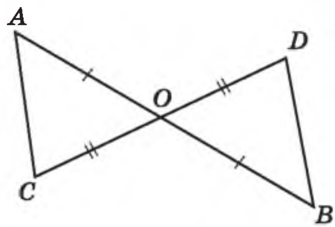
Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC — на промінь A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, після накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ▲

Задача 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо мал. 222. За умовою $AO = OB$ і $CO = OD$. Окрім того, $\angle AOC = \angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$. ▲



Мал. 221

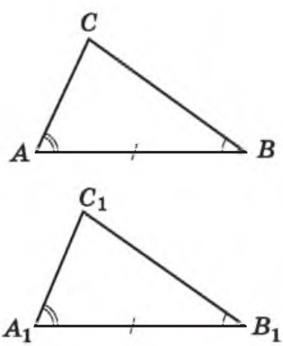


Мал. 222

Т е о р е м а 2 (друга ознака рівності трикутників). **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 223).

Оскільки $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC$ можна накласти на $\triangle A_1B_1C_1$ так, що вершина A збігатиметься з вершиною A_1, вершина B — з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC — на промінь B_1C_1. Тоді точка C — спільна точка променів AC і BC — збігатиметься

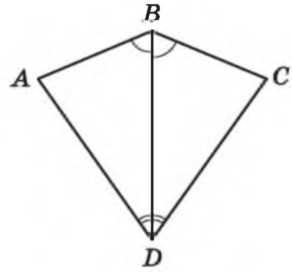


Мал. 223

з точкою C_1 — спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Теорему доведено. ▲

Задача 2. Довести рівність кутів A і C (мал. 224), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

Доведення. Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\triangle ABD = \triangle CBD$. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$. ▲



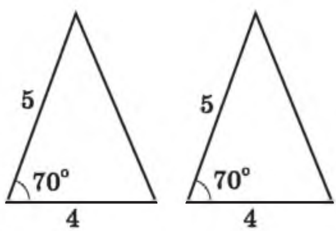
Мал. 224

Сформулюйте і доведіть першу ознаку рівності трикутників. Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.

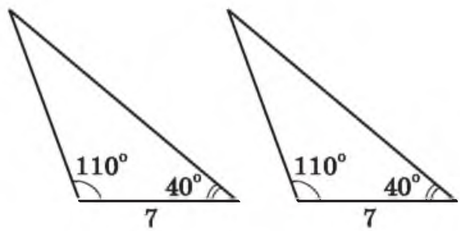
300. (*Усно*) Трикутники на малюнках 225, 226 рівні між собою. За якою ознакою?

301. Трикутники на малюнках 227, 228 рівні між собою. За якою ознакою?

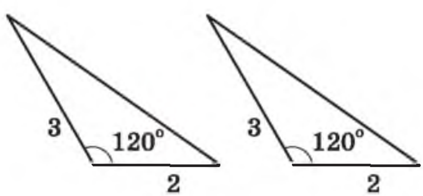
302. Назвіть спільний елемент трикутників ABC і CDA (мал. 229) та трикутників KML і KNP (мал. 230).



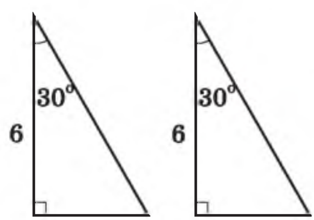
Мал. 225



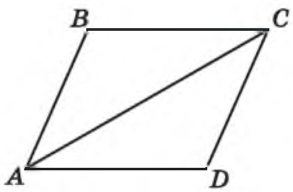
Мал. 226



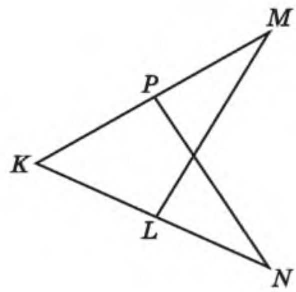
Мал. 227



Мал. 228

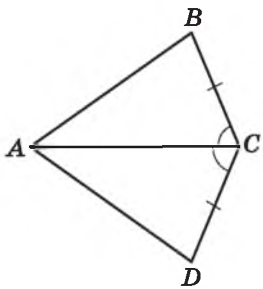


Мал. 229

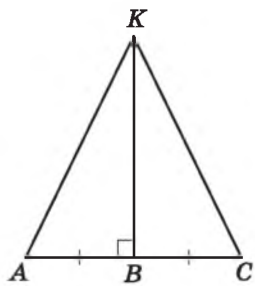


Мал. 230

303. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$ (мал. 231), якщо $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$.



Мал. 231

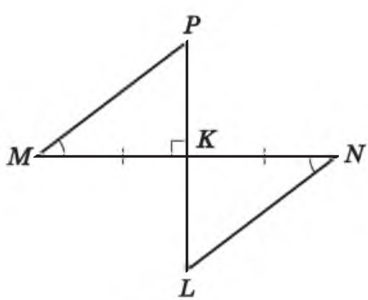


Мал. 232

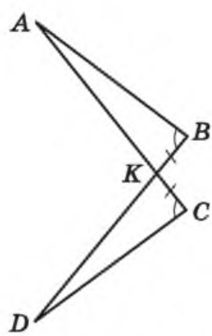
304. Дано: $AB = BC$, $BK \perp AC$ (мал. 232).
Довести: $\triangle ABK = \triangle CBK$.

305. Дано: $MK = KN$, $\angle M = \angle N$, $PL \perp MN$ (мал. 233).
Довести: $\triangle MKP = \triangle NKL$.

306. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCK$ (мал. 234), якщо $KB = KC$ і $\angle ABK = \angle DCK$.



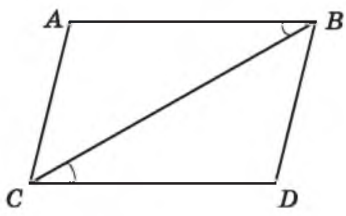
Мал. 233



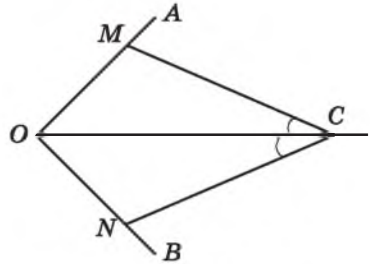
Мал. 234

307. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$ (мал. 235), якщо $AB = CD$ і $\angle ABC = \angle BCD$.

308. Промінь OC є бісектрисою кута AOB (мал. 236), $\angle OCM = \angle OCN$. Доведіть, що $\triangle OMC = \triangle ONC$.



Мал. 235



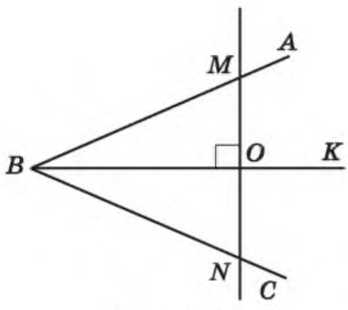
Мал. 236

309. Промінь BK є бісектрисою кута ABC (мал. 237), $MN \perp BK$. Доведіть, що $MO = ON$.

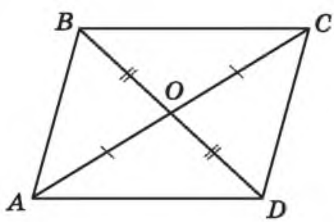
310. Дано: $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 238).
Довести: $AB = CD$, $BC = AD$.

311. Дано: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$ (мал. 239).
Довести: $\triangle ABC = \triangle CDA$.

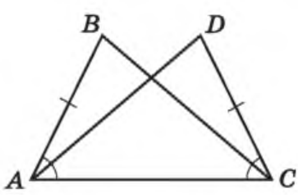
312. Доведіть рівність трикутників MKL і KMP, зображених на малюнку 240, якщо $\angle LMK = \angle PKM$ і $\angle LKM = \angle PMK$.



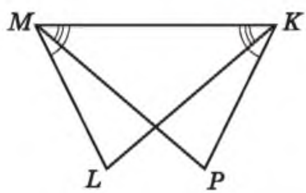
Мал. 237



Мал. 238

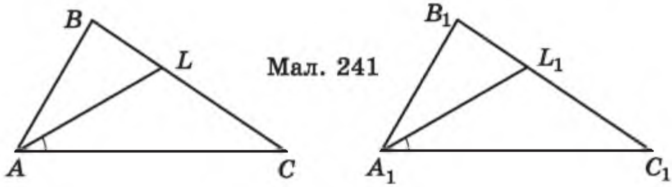


Мал. 239



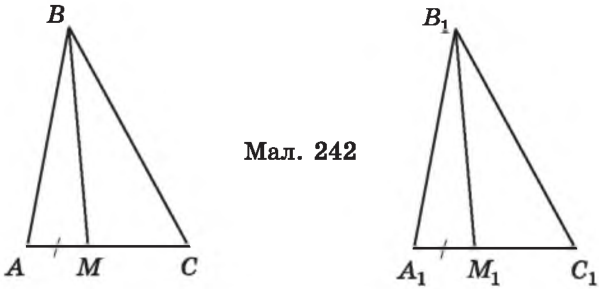
Мал. 240

313. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC і B_1C_1 позначено відповідно точки L і L_1 такі, що $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (мал. 241). Доведіть, що $\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$.



Мал. 241

314. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено відповідно точки M і M_1 такі, що $AM = A_1M_1$ (мал. 242). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.



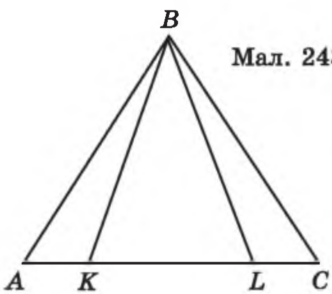
Мал. 242

315. Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту іншого трикутника, то такі трикутники між собою рівні? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

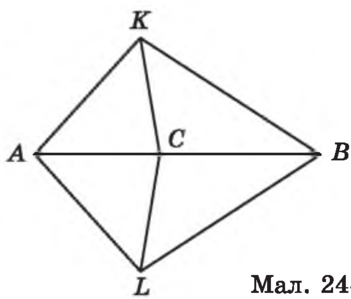
316. Чи можна стверджувати, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники між собою рівні? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

317. $\triangle ABK = \triangle CBL$ (мал. 243). Доведіть, що $\triangle ABL = \triangle CBK$.

318. $\triangle AKC = \triangle ALC$ (мал. 244). Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle BLC$.



Мал. 243



Мал. 244

319. На бісектрисі кута A позначили точку B, а на його сторонах такі точки M і N, що $\angle ABM = \angle ABN$. Доведіть, що $MN \perp AB$.

320. Одна зі сторін трикутника дорівнює 4 дм, що на 13 см менше від другої сторони і вдвічі більше за третю. Знайдіть периметр трикутника.

321. Сума трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює 270°. Чи перпендикулярні прямі a і c; b і c?

322. Як з прямокутників, що мають розміри 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, ..., 1×100, скласти прямокутник, кожна сторона якого більша за 1?

§ 14. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Ви вже вмієте класифікувати трикутники за кутами. Розглянемо класифікацію трикутників залежно від їх сторін.

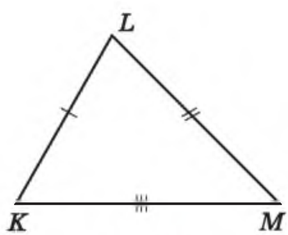
Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають ***бічними сторонами***, а його третю сторону — ***основою***. На малюнку 245 зображено рівнобедрений трикутник ABC, AB — його основа, AC і BC — бічні сторони.

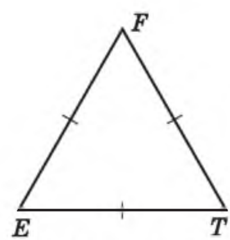
Трикутник, усі сторони якого мають різні довжини, називають *різностороннім*.
Трикутник, усі сторони якого рівні, називають рівностороннім.

На малюнку 246 зображено різносторонній трикутник KLM, а на малюнку 247 — рівносторонній трикутник EFT.

Мал. 245



Мал. 246



Мал. 247

Отже, залежно від сторін, розрізняють такі види трикутників: ***різносторонні***, ***рівнобедрені***, ***рівносторонні***.

Розглянемо властивості та ознаки рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а 1 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). **У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB (мал. 245). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.

Оскільки $AC = BC$, $CB = CA$ і $\angle C$ — спільний для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за першою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено. ▲

Н а с л і д о к. **У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо рівносторонній трикутник EFT (мал. 247), у якого $EF = FT = ET$. Оскільки $EF = FT$, то його можна вважати рівнобедреним з основою ET. Тому $\angle E = \angle T$. Аналогічно (вважаючи основою FT), маємо, що $\angle F = \angle T$. Отже, $\angle E = \angle T = \angle F$. ▲

Задача 1. На малюнку 248 $AB = BC$, $AD = EC$. Доведіть, що $\angle BDE = \angle BED$.

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AC. Тому $\angle A = \angle C$.

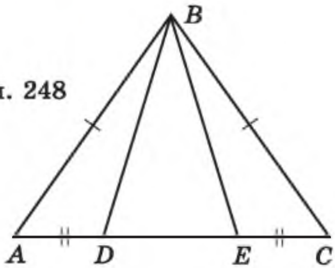
2) $\triangle BAD = \triangle BCE$ (за першою ознакою). Тому $BD = BE$.

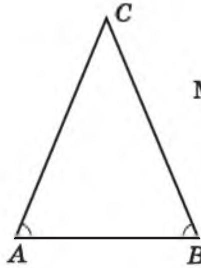
3) Отже, $\triangle BDE$ — рівнобедрений з основою DE. Тому $\angle BDE = \angle BED$, що й треба було довести. ▲

Т е о р е м а 2 (ознака рівнобедреного трикутника). **Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (мал. 249). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.

Мал. 248





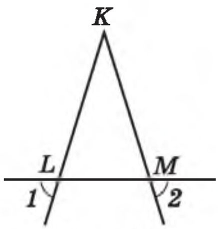
Мал. 249

Оскільки $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ і AB — спільна сторона для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за другою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Тому $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AB. Теорему доведено. ▲

Зауважимо, що розглянута теорема є оберненою до теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

Н а с л і д о к. Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

Д о в е д е н н я. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ — рівносторонній. ▲



Мал. 250

Задача 2. Д а н о: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 250).

Д о в е с т и: $\triangle KLM$ — рівнобедрений.

Д о в е д е н н я.

$\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні),

$\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні),

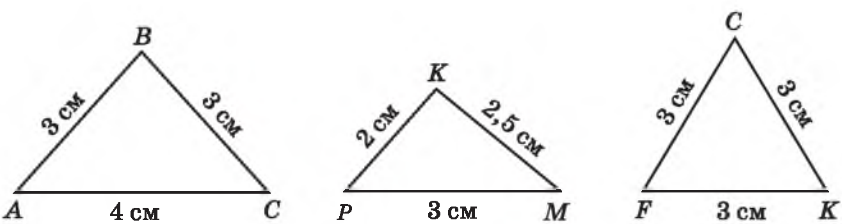
$\angle 1 = \angle 2$ (за умовою).

Тому $\angle KLM = \angle KML$.

Отже, $\triangle KLM$ — рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). ▲

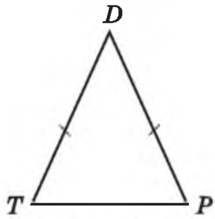
Який трикутник називають рівнобедреним; різностороннім; рівностороннім? ● Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника та наслідок з неї. ● Сформулюйте та доведіть ознаку рівнобедреного трикутника та наслідок з неї.

323. (*Усно*) Який з трикутників, зображених на малюнку 251, є рівнобедреним, який — рівностороннім, а який — різностороннім? Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, зображеного на цьому малюнку.



Мал. 251

324. Укажіть основу та бічні сторони трикутника DTP (мал. 252). Що можна сказати про кути T і P цього трикутника?



Мал. 252

325. Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть другий кут при основі цього трикутника.

326. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, ще одна сторона — 7 см. Яка довжина третьої сторони?

327. $\triangle ABC$ — рівносторонній, $AB = 10$ см. Знайдіть його периметр.

328. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює 15 см. Знайдіть довжину сторони BC цього трикутника.

329. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 9 см, а основа на 2 см менша від бічної сторони.

330. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 10 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

331. (*Усно*) Чи може бути рівнобедреним трикутник, усі кути якого різні? Відповідь обґрунтуйте.

332. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 7 см. Знайдіть основу трикутника.

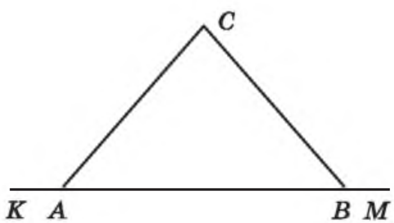
333. Периметр рівнобедреного трикутника AMN з основою MN дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину основи MN, якщо $AM = 7$ дм.

334. Периметр рівнобедреного трикутника ACD з бічними сторонами AC і AD дорівнює 30 дм. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо $CD = 12$ дм.

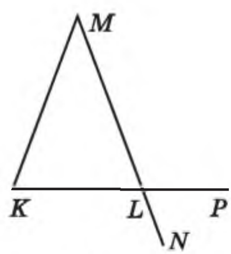
335. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 17 см, а основа — 5 см.

336. $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AB (мал. 253). Доведіть, що $\angle KAC = \angle MBC$.

337. $\triangle KLM$ — рівнобедрений з основою KL (мал. 254). Доведіть, що $\angle MKL = \angle PLN$.



Мал. 253



Мал. 254

338. Чи правильні твердження:
1) будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним;
2) будь-який рівнобедрений трикутник є рівностороннім?

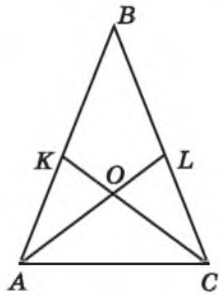
339. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см і він більший за суму двох бічних сторін на 6 см.

340. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 44 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

341. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 35 дм, а основа вдвічі менша від бічної сторони.

342. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $AK = LC$ (мал. 255). Доведіть, що $AL = KC$.

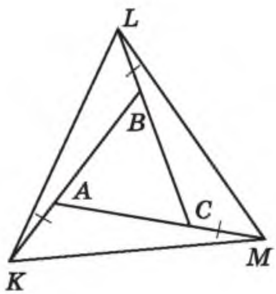
343. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $\angle KCA = \angle LAC$ (мал. 255). Доведіть, що відрізки AK і CL рівні.



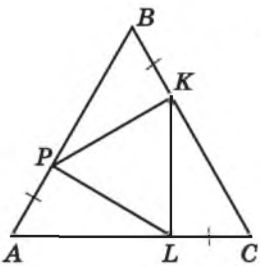
Мал. 255

344. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AK, BL і CM (мал. 256). Доведіть, що трикутник KLM — рівносторонній.

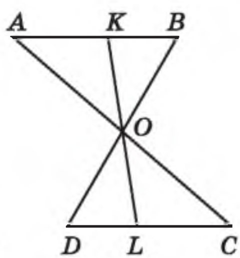
345. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BK і CL (мал. 257). Доведіть, що трикутник PKL — рівносторонній.



Мал. 256



Мал. 257



Мал. 258

346. Доведіть, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°.

347. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O так, що $\triangle AOB = \triangle COD$ (мал. 258). Точка K належить відрізку AB, а точка L — відрізку DC, причому KL проходить через точку O. Доведіть, що $KO = OL$ і $KB = DL$.

348. На відрізку $AB = 48$ см позначено точку K так, що $5AK = 7BK$. Знайдіть довжини відрізків AK і BK.

349. Знайдіть по два розв'язки кожної з анаграм, якщо один з них є геометричним терміном, відомим з попередніх класів.

1) НОСУК;

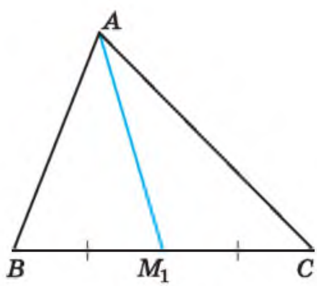
2) ТСОРЕК.

§ 15. *МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА. ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА*

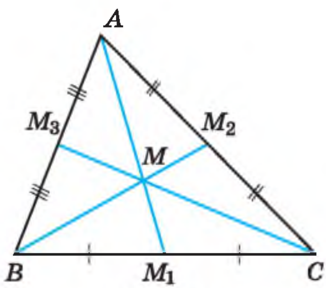
У кожному трикутнику можна провести кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

Медіаною трикутника **називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На малюнку 259 відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 260 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 — медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.



Мал. 259



Мал. 260

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають ***центроїдом*** *трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.*

На малюнку 260 точка M — центроїд трикутника ABC.

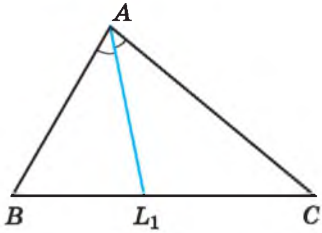
Цю властивість буде доведено у старших класах.

Бісектрисою трикутника **називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.**

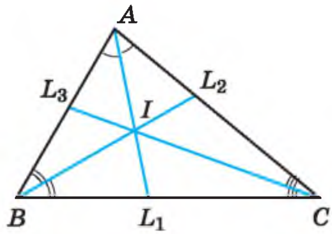
На малюнку 261 відрізок AL_1 — бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 262 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 — бісектриси трикутника ABC.

У § 23 доведемо, що *в будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці* (її називають ***інцентром***).

На малюнку 262 точка I — інцентр трикутника ABC.



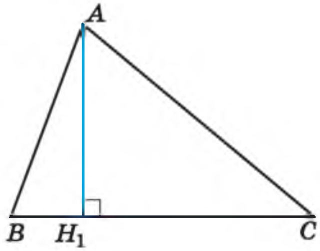
Мал. 261



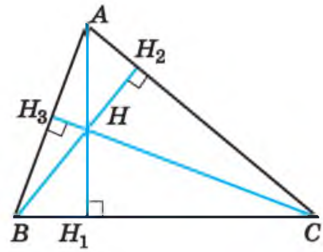
Мал. 262

Висотою трикутника **називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

На малюнку 263 відрізок AH_1 — висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 264 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 265 ці відрізки — висоти прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, а на малюнку 266 ці відрізки — висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A.

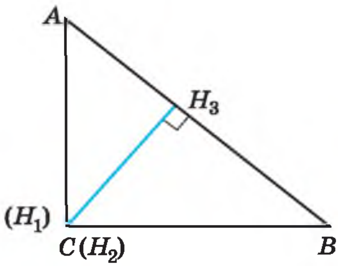


Мал. 263

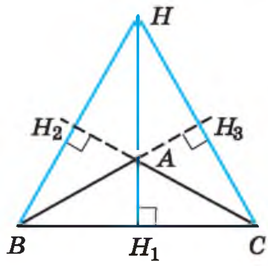


Мал. 264

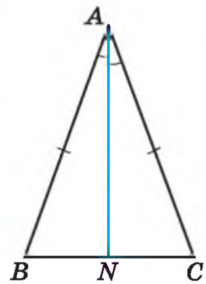
У старших класах буде доведено, що *в будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці* (її називають ***ортоцентром*** трикутника). На малюнках 264 і 266 точка H — ортоцентр трикутника ABC, на малюнку 265 ортоцентр трикутника збігається з точкою C — вершиною прямого кута трикутника ABC.



Мал. 265



Мал. 266



Мал. 267

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника). **У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC, AN — його бісектриса (мал. 267). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $AB = AC$, і тому $\angle BAN = \angle CAN$, а відрізок AN є спільною стороною трикутників BAN і CAN, то $\triangle BAN = \triangle CAN$ (за першою ознакою).

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN — медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні і рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90°$. Отже, AN є також висотою.

Теорему доведено. ▲

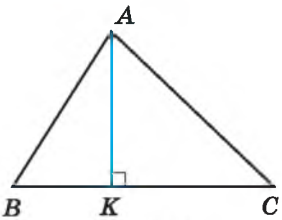
Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справедливими є такі наслідки з теореми.

Н а с л і д о к 1. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.

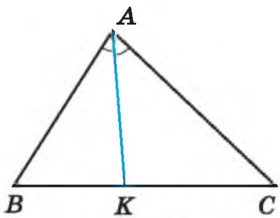
Н а с л і д о к 2. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою.

Який відрізок називають медіаною трикутника? Скільки медіан має трикутник? Який відрізок називають бісектрисою трикутника? Скільки бісектрис має трикутник? Який відрізок називають висотою трикутника? Скільки висот має трикутник? Сформулюйте і доведіть теорему про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.

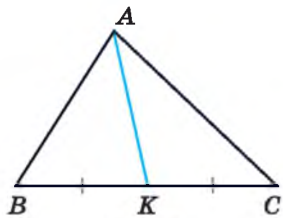
1 **350.** (*Усно*) Як називають відрізок AK у трикутнику ABC (мал. 268–270)?



Мал. 268



Мал. 269

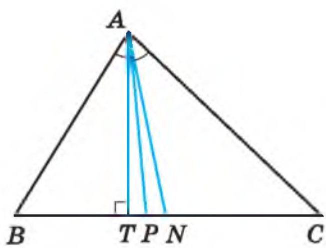


Мал. 270

351. 1) Як у $\triangle ABC$ називають відрізок AT (мал. 271), якщо він є перпендикуляром до прямої BC?

2) Як у $\triangle ABC$ називають відрізок AN, якщо $BN = NC$?

3) Як у $\triangle ABC$ називають відрізок AP, якщо $\angle BAP = \angle PAC$?



Мал. 271

352. У трикутнику ABC відрізок AK — висота (мал. 268). Знайдіть градусні міри кутів BKA і CKA.

353. У трикутнику ABC відрізок AK — бісектриса (мал. 269). Кут BAK дорівнює 35°. Знайдіть градусну міру кута BAC.

354. У трикутнику ABC відрізок AK — медіана (мал. 270). BC = 10 см. Знайдіть довжини відрізків BK і KC.

2 **355.** Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть його медіани.

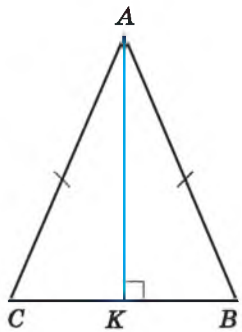
356. Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси.

357. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

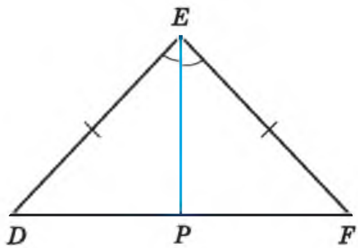
358. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

359. На малюнку 272 відрізок AK — висота рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

360. На малюнку 273 відрізок EP — бісектриса рівнобедреного трикутника DEF з основою DF. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.



Мал. 272



Мал. 273

361. (*Усно*) Чому не можна стверджувати, що три висоти трикутника завжди перетинаються в одній точці?

362. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$. Бісектриса, проведена до якої із сторін, є одночасно і медіаною, і висотою?

363. (*Усно*) Які елементи трикутника або їх частини сумістяться, якщо його зігнути по: 1) бісектрисі; 2) висоті?

364. Доведіть, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник — рівнобедрений.

365. Доведіть, що коли медіана трикутника є його висотою, то трикутник — рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задач 364 і 365 можна вважати ознаками рівнобедреного трикутника.

366. AD і A_1D_1 — відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

367. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, — рівні.

368. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, — рівні.

369. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см, а периметр трикутника ABD дорівнює 40 см.

370. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено медіану CK. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 12 см, а периметр трикутника ABC — 16 см.

371. Доведіть, що коли медіана трикутника є його бісектрисою, то трикутник — рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задачі 371 можна вважати ознакою рівнобедреного трикутника.

372. Два з восьми кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c, дорівнюють 30° і 140°. Чи можуть прямі a і b бути паралельними?

373. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На його стороні побудували рівнобедрений трикутник так, що сторона даного трикутника є основою рівнобедреного. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 18 см.

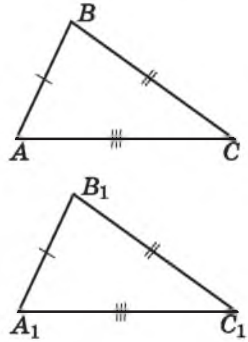
374. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 69 см, якщо його основа складає 30 % від бічної сторони.

375. Олесь придбав акваріум у формі куба, що вміщує 125 л води. Він наповнив акваріум, не доливши до краю 6 см. Скільки літрів води Олесь залив в акваріум?

§ 16. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

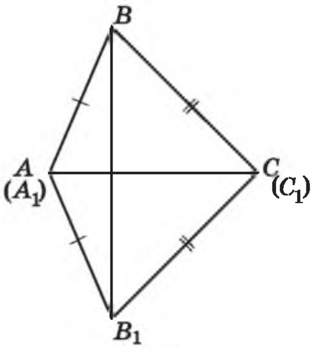
Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників — за трьома сторонами.

Т е о р е м а (третя ознака рівності трикутників). **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.**

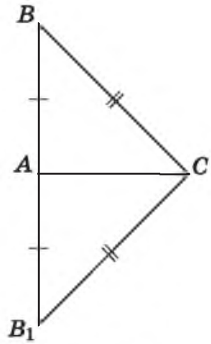


Мал. 274

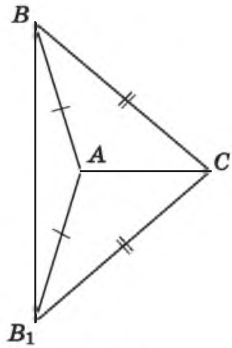
Д о в е д е н н я. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 274). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 — з вершиною C, а вершини B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить всередині кута ABC (мал. 275), промінь BB_1 збігається з однією із сторін цього кута (мал. 276), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 277).



Мал. 275



Мал. 276

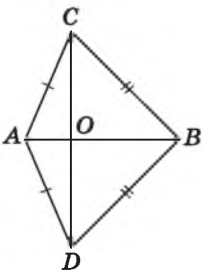


Мал. 277

Розглянемо перший випадок (інші випадки розгляньте самостійно). Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники ABB_1 і CBB_1 — рівнобедрені з основою BB_1. Тоді $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ і $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Тому $\angle ABC = \angle AB_1C$.

Отже, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників).

Теорему доведено. ▲



Мал. 278

Задача. Д а н о: $AC = AD$, $BC = BD$ (мал. 278).
Д о в е с т и: $CO = OD$.

Д о в е д е н н я.

1) Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$.
$AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою),
AB — спільна сторона.
Тоді $\triangle ABC = \triangle ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

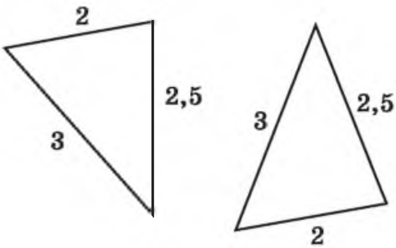
2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB — бісектриса кута CAD.

3) Тоді AO — бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника AO є також і медіаною. Оскільки AO — медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й треба було довести. ▲

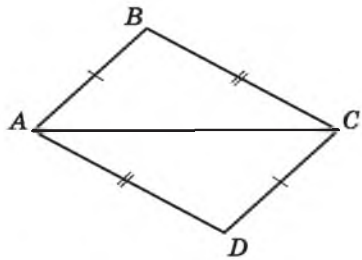
Сформулюйте і доведіть третю ознаку рівності трикутників.

376. (*Усно*) Чи є трикутники, зображені на малюнку 279, між собою рівними? За якою ознакою?

377. Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 280, якщо $AB = DC$ і $BC = AD$.



Мал. 279

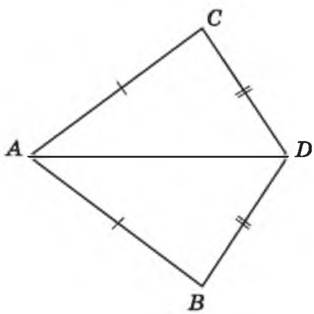


Мал. 280

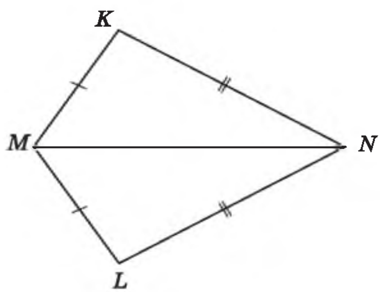
378. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle ABD$ (мал. 281), якщо $AC = AB$ і $DC = DB$.

379. На малюнку 282 $MK = ML$, $KN = NL$. Доведіть, що $\angle K = \angle L$.

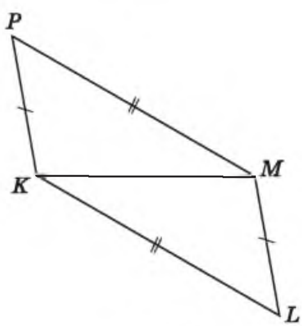
380. На малюнку 283 $PK = ML$, $PM = KL$. Доведіть, що $\angle PKM = \angle LMK$.



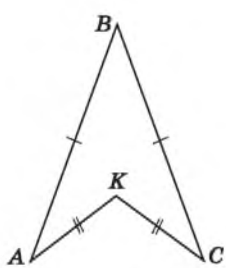
Мал. 281



Мал. 282



Мал. 283



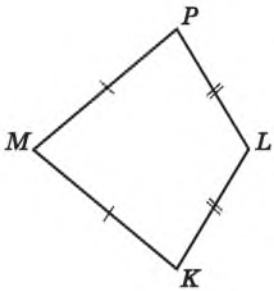
Мал. 284

381. На малюнку 284 $AB = BC$, $AK = KC$. Доведіть, що BK — бісектриса кута ABC.

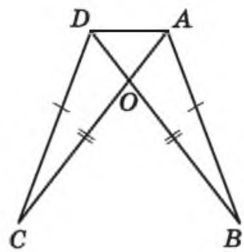
382. На малюнку 285 $MP = MK$, $PL = KL$. Доведіть, що ML — бісектриса кута PMK.

383. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (мал. 286).
Довести: $\triangle AOD$ — рівнобедрений.

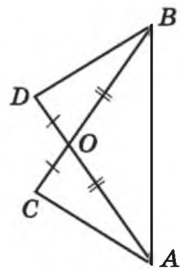
384. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (мал. 287).
Довести: $\triangle ABC = \triangle BAD$.



Мал. 285



Мал. 286



Мал. 287

385. Про трикутники ABC і MNP відомо, що $AB \neq MN$, $BC \neq NP$, $AC \neq MP$. Чи можуть бути рівними такі трикутники?

386. Трикутники ABC і MNP — рівнобедрені. Відомо, що $AB = MN = 5$ см, а $BC = NP = 7$ см. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

387. Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) взято точку K так, що $BK = KC$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до BC.

388. Усередині рівнобедреного трикутника DMN ($DM = DN$) взято точку P так, що $MP = PN$. Доведіть, що пряма DP ділить навпіл сторону MN.

389. Як, використовуючи шаблон кута в 10°, побудувати перпендикулярні прямі?

390. Промінь AK проходить між сторонами кута BAC. $\angle BAC = 126°$. Відомо, що $4\angle BAK = 5\angle KAC$. Знайдіть градусні міри кутів BAK і KAC.

391. Накресліть прямокутник розміром 4×6 клітинок. Покажіть, як «замостити» (покрити без накладань і вільних клітинок) його куточками, кожний з яких складається з трьох клітинок, так, щоб жодні два з них не утворювали прямокутника.

Домашня самостійна робота № 3 (§ 11 – § 16)

1. Дано $\triangle KLM$, у якого $KM = 4$ см, $ML = 7$ см, $KL = 10$ см. Знайдіть його периметр.

А) 20 см; Б) 21 см; В) 22 см; Г) 23 см.

2. $\triangle PTK$ — різносторонній, $\triangle ABC = \triangle PTK$. Тоді справедлива рівність $\angle B = ...$

А) $\angle P$; Б) $\angle T$; В) $\angle K$; Г) жодному з кутів $\triangle PTK$.

3. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, де $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тоді...

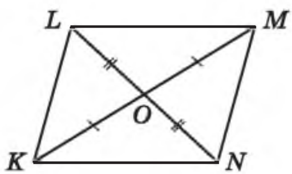
А) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою);
Б) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за другою ознакою);
В) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за третьою ознакою);
Г) не можна встановити рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а його основа — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

А) 12 см; Б) 10 см; В) 8 см; Г) 6 см.

5. На малюнку 288 $LO = ON$, $KO = OM$, $\angle KOL \neq \angle LOM$. Укажіть правильну рівність.

А) $\triangle KOL = \triangle LOM$;
Б) $\triangle KOL = \triangle OMN$;
В) $\triangle KOL = \triangle MON$;
Г) $\triangle KOL = \triangle NOM$.



Мал. 288

6. AM, BN і CL — медіани трикутника ABC. Яка з них є ще й бісектрисою і висотою, якщо $\angle A = \angle B$, а $\angle B \neq \angle C$?

А) AM; Б) BN; В) CL; Г) жодна.

7. Одна зі сторін трикутника вдвічі менша за другу і на 2 см менша за третю. Знайдіть більшу зі сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.

А) 5 см; Б) 7 см; В) 9 см; Г) 10 см.

8. Відомо, що $\triangle KLM = \triangle MLK$. Знайдіть периметр трикутника KLM, якщо $KL = 6$ см, $KM = 5$ см.

А) 17 см; Б) 16 см;
В) 18 см; Г) знайти неможливо.

9. BK — висота трикутника ABC, $AB = BC$. Укажіть неправильне твердження.

А) $\angle ABC = \angle BKA$; Б) $\angle BAC = \angle BCA$;
В) $\triangle BAK = \triangle BCK$; Г) $\angle ABK = \angle CBK$.

10. Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$, $AB = 5$ см. Знайти: BC, CA.

А) $BC = 6$ см, $CA = 7$ см; Б) $BC = 4$ см, $CA = 3$ см;
В) $BC = 4$ см, $CA = 4$ см; Г) $BC = 5$ см, $CA = 5$ см.

11. AB — основа рівнобедреного трикутника ABC, CK — його бісектриса. Знайдіть довжину цієї бісектриси, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а периметр трикутника ACK дорівнює 30 см.

А) 6 см; Б) 8 см; В) 10 см; Г) 12 см.

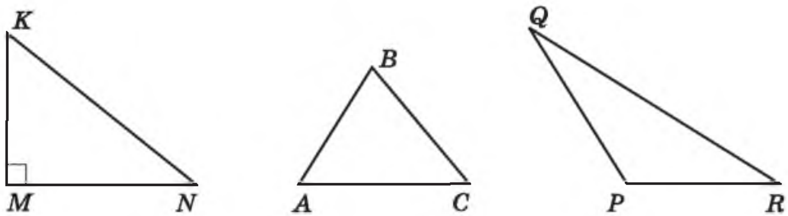
12. У трикутнику ABC $AB = AC$. Точка M така, що $BM = MC$. Укажіть неправильне твердження.

А) $\angle MBC = \angle MCB$; Б) $\angle MBA > \angle MCA$;
В) $\angle BMA = \angle CMA$; Г) $\angle BAM = \angle CAM$.

Завдання для перевірки знань № 3 (§ 11 – § 16)

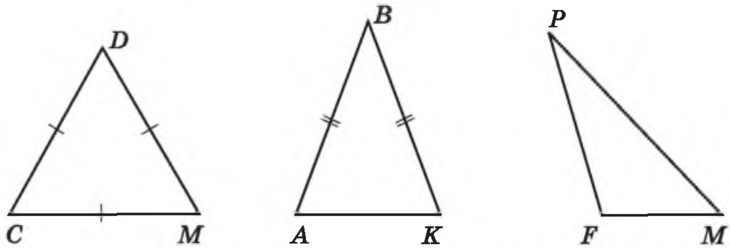
1. Накресліть трикутник MNK. Запишіть назви його вершин, сторін та кутів.

2. Який із зображених на малюнку 289 трикутників є гострокутним, який — прямокутним, а який — тупокутним?



Мал. 289

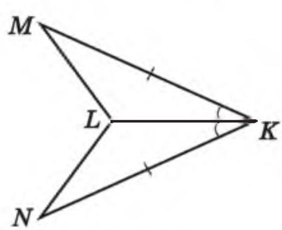
3. Який із зображених на малюнку 290 трикутників є рівнобедреним, який — рівностороннім, а який — різностороннім?



Мал. 290

4. $\triangle ABC = \triangle KMF$. Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $KF = 7$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KMF.

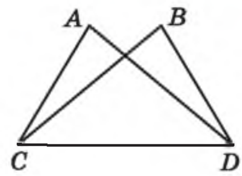
5. На малюнку 291 $MK = KN$, $\angle LKM = \angle LKN$. Доведіть, що $\triangle MKL = \triangle NKL$.



Мал. 291

6. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою завдовжки 12 см, бічна сторона якого на 3 см більша за основу.

7. На малюнку 292 $AC = BD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ADC$.



Мал. 292

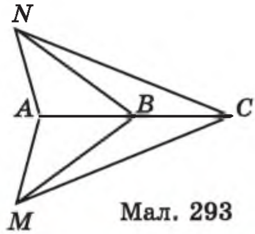
8. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої і на 3 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 23 см.

9. У рівнобедреному трикутнику KML з основою KL проведено медіану MP. Знайдіть периметр трикутника KML, якщо $MP = 8$ дм, а периметр трикутника MKP дорівнює 24 дм.

Додаткові вправи

10. На малюнку 293 $\triangle ANB = \triangle AMB$. Доведіть, що $NC = MC$.

11. Відомо, що $\triangle MKL = \triangle KLM$. Знайдіть периметр трикутника MKL, якщо він на 10 см більший за сторону MK.



Мал. 293

§ 17. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії.

Т е о р е м а (про суму кутів трикутника). **Сума кутів трикутника дорівнює 180°.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутник ABC і доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

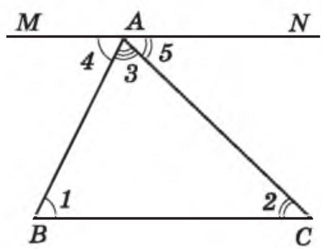
1) Проведемо через вершину A пряму MN паралельно прямій BC (мал. 294). Позначимо $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$, $\angle BAC = \angle 3$, $\angle MAB = \angle 4$, $\angle NAC = \angle 5$.

Кути 1 і 4 — внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих BC і MN січною AB, а кути 2 і 5 — внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною AC. Тому $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 2 = \angle 5$.

2) $\angle MAN$ — розгорнутий, тому:

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°.$$

Оскільки $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 2$, то $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 1 + \angle 2 = 180°$, тобто $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й треба було довести. ▲



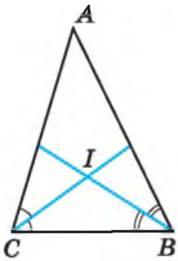
Мал. 294

Наслідок. У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.

Доведення. Припустимо, що в трикутнику лише один кут є гострим. Тоді сума двох інших кутів, що не є гострими, не менша за 180°. А отже, у сумі з гострим перевищить 180°, що суперечить доведеній теоремі. Прийшли до протиріччя, бо наше припущення є неправильним. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут. ▲

Враховуючи цей наслідок, можна сказати, що гострокутний трикутник має три гострих кути; прямокутний трикутник має один прямий і два гострих кути; тупокутний трикутник має один тупий і два гострих кути.

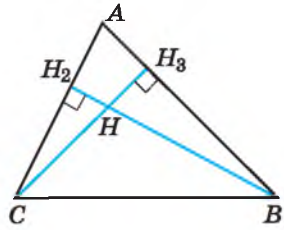
Задача 1. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці I. Доведіть, що $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$.



Мал. 295

Доведення. $\angle ICB = \frac{\angle ACB}{2}$; $\angle IBC = \frac{\angle ABC}{2}$ (мал. 295). Тоді $\angle BIC = 180° - (\angle ICB + \angle IBC) = 180° - \left(\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2}\right) = 180° - \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} = 180° - \frac{180 - \angle A}{2} = 180° - 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}$ (скористалися тим, що сума кутів кожного з трикутників BCI і ABC дорівнює 180°), що й треба було довести.

Задача 2. Висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H, $\angle A = \alpha$ (мал. 296). Знайдіть $\angle BHC$.



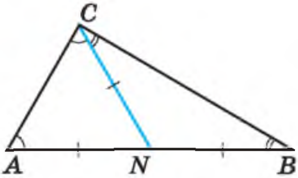
Мал. 296

Розв'язання. Розглянемо трикутник H_2BC.
$\angle H_2BC = 180° - (90° + \angle ACB) = 90° - \angle ACB$. У $\triangle H_3CB$: $\angle H_3CB = 180° - (90° + \angle ABC) = 90° - \angle ABC$.
Тоді у $\triangle HCB$: $\angle BHC = 180° - (\angle HBC + \angle HCB) = 180° - (90° - \angle ACB + 90° - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle A = 180° - \alpha$. Отже, $\angle BHC = 180° - \alpha$.

Відповідь. $180° - \alpha$.

Задача 3. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Доведіть, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

Д о в е д е н н я (мал. 297). Оскільки $CN = \frac{AB}{2}$ і N — середина відрізка AB, то $CN = AN = BN$. Отже, трикутники ANC і CNB — рівнобедрені. Тому $\angle A = \angle ACN$, $\angle B = \angle BCN$. Таким чином, $\angle C = \angle A + \angle B$. Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Тому $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Отже, $\angle C = 180° - \angle C$. Звідси $\angle C = 90°$. Трикутник ABC — прямокутний з прямим кутом C, що й треба було довести. ▲



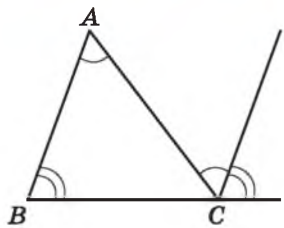
Мал. 297

А ще раніше...

Властивість про суму кутів трикутника експериментальним шляхом було встановлено в Давньому Єгипті, проте відомості про різні способи доведення цієї теореми належать до більш пізніх часів.

Доведення, яке ми розглянули вище, є в коментарях Прокла до «Основ» Евкліда. Він же стверджував, що це доведення було відоме ще учням школи Піфагора (піфагорійцям) у V ст. до н.е.

Сам же Евклід у першій книжці «Основ» запропонував доведення теореми про суму кутів трикутника у спосіб, який можна побачити на малюнку 298 (виконайте це доведення самостійно).



Мал. 298

Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника. Сформулюйте і доведіть наслідок із цієї теореми.

392. (*Усно*) Дано трикутник PLK. Знайдіть значення суми $\angle P + \angle L + \angle K$?

393. Чи існує трикутник з кутами:

1) 40°, 50° і 70°; 2) 80°, 30° і 70°?

394. Чи існує трикутник з кутами:

1) 20°, 100° і 80°; 2) 40°, 50° і 90°?

395. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

1) 42° і 54°; 2) 7° і 95°; 3) 89° і 87°.

396. Знайдіть третій кут трикутника, якщо перший і другий кути дорівнюють:

1) 14° і 39°; 2) 29° і 106°; 3) 5° і 92°.

397. (*Усно*) Закінчіть речення:

1) якщо один з кутів трикутника тупий, то інші... ;

2) якщо один з кутів трикутника прямий, то інші... .

398. Сума двох кутів трикутника дорівнює 125°. Знайдіть третій кут трикутника.

399. У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 94°$. Знайдіть $\angle C$.

400. Один з кутів трикутника дорівнює 62°. Знайдіть суму градусних мір двох інших кутів.

401. Доведіть, що кожний з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

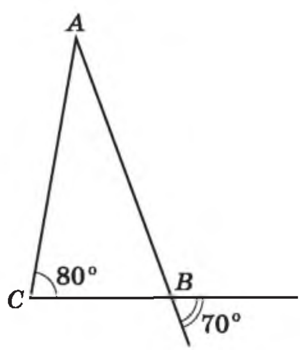
402. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині.

403. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 45°.

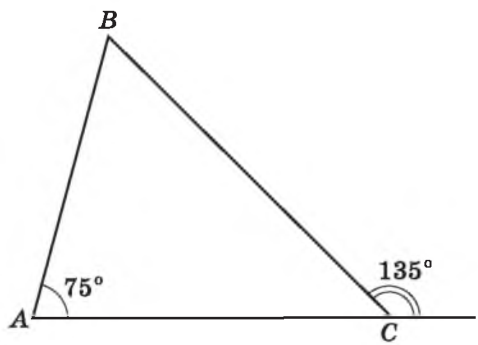
404. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 80°.

405. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть кути при основі.

406. Знайдіть невідомі кути трикутника ABC на малюнках 299, 300.



Мал. 299



Мал. 300

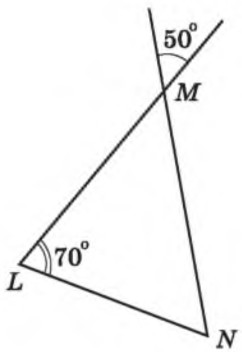
407. Знайдіть невідомі кути трикутника MNL на малюнках 301, 302.

408. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 303). Знайдіть $\angle PCB$, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$.

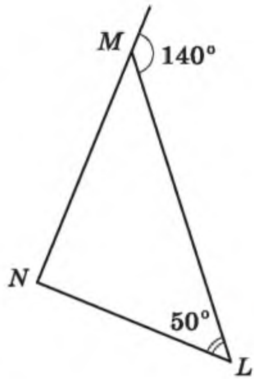
409. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 303). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 65°$, $\angle ACP = 40°$.

410. Знайдіть кути трикутника MNL, якщо $\angle M + \angle N = 120°$, $\angle M + \angle L = 140°$.

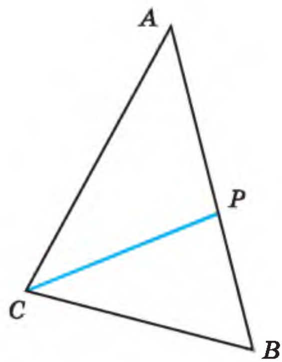
411. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 100°$, $\angle A + \angle C = 130°$.



Мал. 301



Мал. 302



Мал. 303

412. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не менший від 60°.

413. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60°.

414. У трикутнику ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$. Знайдіть ці кути.

415. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо вони відносяться як 2 : 3 : 5.

416. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 15° більший за кут при вершині.

417. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині на 24° більший за кут при основі.

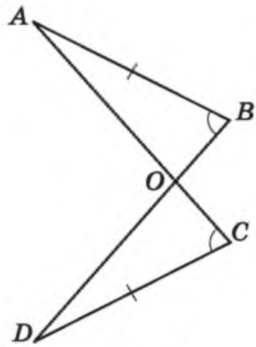
418. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі.

419. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник — рівносторонній. Доведіть це твердження. (Розгляньте два випадки.)

420. Один з кутів трикутника дорівнює 80°, а другий на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

421. Один з кутів трикутника вдвічі більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо третій кут дорівнює 36°.

422. На малюнку 304 $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.



Мал. 304

423. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

424. У трикутнику два кути дорівнюють 46° і 64°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси цих кутів.

425. У трикутнику два кути дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти цих кутів.

426. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 12°; 2) 92°.

427. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 28°; 2) 106°.

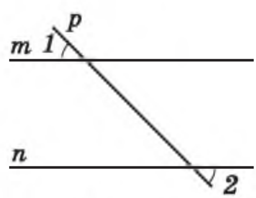
428. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються під прямим кутом.

429. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них удвічі більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

430. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 15° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

431. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 72°, а бісектриса кута при основі цього ж трикутника — 5 см. Знайдіть основу трикутника.

432. Точка K лежить між точками P і L. Знайдіть PK, якщо PL = 56 мм, а KL = 3 см 4 мм.



Мал. 305

433. Дано $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 305). Доведіть, що $m \parallel n$.

434. $\angle AOB = 40°$, $\angle AOC = 60°$. Знайдіть $\angle BOC$. Скільки випадків слід розглянути?

435. Трикутники ABC і ABD — рівносторонні. Доведіть, що $AB \perp CD$.

436. Чи можна двома ударами сокири розрубати підкову (мал. 306) на 6 частин, не переміщаючи частин після першого удару? Якщо відповідь позитивна, укажіть, як це зробити.

Мал. 306

§ 18. ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА

Зовнішнім кутом трикутника **називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.**

На малюнку 307 кут BAK — зовнішній кут трикутника ABC.

Щоб не плутати кут трикутника із зовнішнім кутом, його іноді називають *внутрішнім кутом.*

Т е о р е м а 1 (властивість зовнішнього кута трикутника). **Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.**

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle BAK$ — зовнішній кут трикутника ABC (мал. 307). Враховуючи властивість суміжних кутів, отримаємо $\angle BAK = 180° - \angle BAC$.

З іншого боку, врахувавши теорему про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$. Тому $\angle BAK = \angle B + \angle C$, що й треба було довести. ▲

Н а с л і д о к. **Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.**

Задача. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

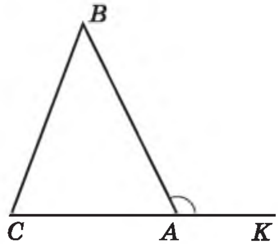
Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\angle BAK$ — зовнішній кут трикутника ABC (мал. 307), $\angle BAK = 120°$. Оскільки $\angle B : \angle C = 3 : 5$, то можемо позначити $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$. Оскільки $\angle BAK = \angle B + \angle C$ (за властивістю зовнішнього кута), маємо рівняння: $3x + 5x = 120°$, звідки $x = 15°$. Тоді $\angle B = 3 \cdot 15° = 45°$, $\angle C = 5 \cdot 15° = 75°$.

В і д п о в і д ь. 45°; 75°.

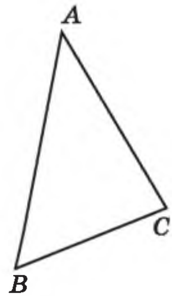
Розглянемо ще одну важливу властивість трикутника.

Теорема 2 (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника). **У трикутнику: 1) проти більшої сторони лежить більший кут; 2) проти більшого кута лежить більша сторона.**

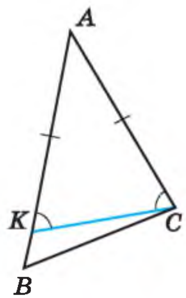
Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC $AB > AC$ (мал. 308). Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AK, що дорівнює відрізку AC (мал. 309). Оскільки $AB > AC$, то точка K належить відрізку AB. Тому $\angle ACK$ є частиною кута ACB і $\angle ACK < \angle ACB$.



Мал. 307



Мал. 308



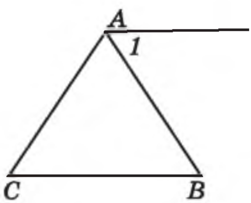
Мал. 309

Трикутник AKC — рівнобедрений, тому $\angle AKC = \angle ACK$. Але кут AKC — зовнішній кут трикутника KBC. Тому $\angle AKC > \angle B$. Отже, і $\angle ACK > \angle B$, а тому $\angle ACB > \angle B$.

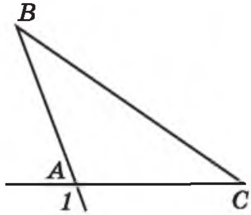
2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$ (мал. 308). Доведемо, що $AB > AC$. Припустимо протилежне, тобто що $AB = AC$ або $AB < AC$. Якщо $AB = AC$, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений, і тоді $\angle C = \angle B$. Це суперечить умові. Якщо ж припустити, що $AB < AC$, то за першою частиною теореми отримаємо, що $\angle C < \angle B$, і це також суперечить умові. Наше припущення неправильне. Отже, $AB > AC$, що й треба було довести. ▲

Що таке зовнішній кут трикутника? Сформулюйте і доведіть теорему про властивість зовнішнього кута трикутника. Сформулюйте наслідок із цієї теореми. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

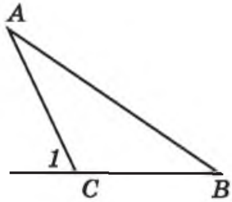
437. (*Усно*) На яких з малюнків 310–312 кут *1* є зовнішнім кутом трикутника *ABC*?



Мал. 310



Мал. 311



Мал. 312

438. Накресліть $\triangle ABC$ та його зовнішній кут при вершині *A*.

439. Накресліть $\triangle DMN$ та його зовнішній кут при вершині *D*.

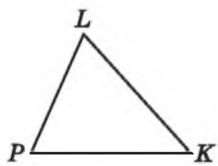
440. (*Усно*) Укажіть суму внутрішнього кута трикутника і його зовнішнього кута при тій самій вершині.

441. Зовнішній кут при вершині *C* трикутника *ABC* дорівнює 70° (мал. 312). Знайдіть суму внутрішніх кутів *A* і *B* цього трикутника.

442. Сума внутрішніх кутів *A* і *B* трикутника *ABC* дорівнює 75° (мал. 312). Знайдіть зовнішній кут цього трикутника при вершині *C*.

443. (*Усно*) У $\triangle PLK$ $PL < LK$ (мал. 313). Порівняйте кути *P* і *K* цього трикутника.

444. У $\triangle PLK$ $\angle L > \angle K$ (мал. 313). Порівняйте сторони *PK* і *PL* цього трикутника.



Мал. 313

445. Два кути трикутника дорівнюють 61° і 38°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

446. У трикутнику *ABC* $\angle A = 42°$, $\angle B = 101°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині *C*.

447. (*Усно*) Скільки гострих кутів може бути серед зовнішніх кутів трикутника?

448. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 100°. Знайдіть кут при основі трикутника.

449. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 55°. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

450. Зовнішній кут при вершині *A* трикутника *ABC* дорівнює 105°. Знайдіть $\angle B$, якщо $\angle C = 45°$.

451. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнює 18°.

452. Внутрішні кути трикутника дорівнюють 45° і 70°. Знайдіть градусну міру зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з його вершин.

453. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють 110° і 140°. Знайдіть градусну міру кожного з трьох внутрішніх його кутів.

454. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 140°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на 30° більший за другий;
2) один з них у 4 рази більший за другий.

455. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, які не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на 20° менший за другий;
2) один з них утричі менший за другий.

456. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 118°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

457. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 42°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

458. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

459. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 4. Знайдіть відношення його внутрішніх кутів.

460. Внутрішні кути трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть відношення зовнішніх кутів трикутника, не знаходячи їх градусних мір.

461. Доведіть, що бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні між собою.

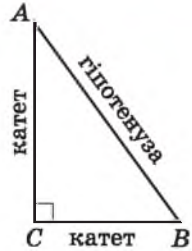
462. Промінь, що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких складає $\frac{1}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

463. Відрізок AB, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Відношення двох з них дорівнює 1 : 2, а третя — на 1,8 см більша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини кожної з трьох частин відрізка.

464. Розріжте деякий квадрат на два рівних між собою п'ятикутники.

§ 19. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Нагадаємо, що *трикутник* називають *прямокутним*, якщо один з його кутів прямий. На малюнку 314 зображено прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90°$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони — ***катетами***.



Мал. 314

Розглянемо властивості прямокутних трикутників.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут складає 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180° - 90° = 90°$.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

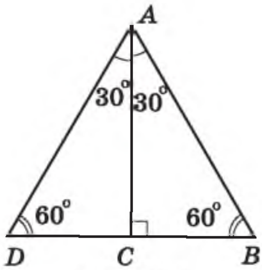
3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Д о в е д е н н я. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$ з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (мал. 315). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90° - 30° = 60°$ і $\angle DAB = 30° + 30° = 60°$. Отже, $\triangle ABD$ — рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2}BD$, то $BC = \frac{1}{2}AB$, що й треба було довести. ▲

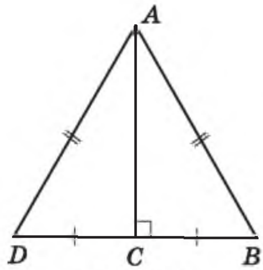
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Д о в е д е н н я. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (мал. 316). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює.

Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60°$. У трикутнику ABC $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$, що й треба було довести. ▲



Мал. 315



Мал. 316

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників.* З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні.

Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних між собою гострих кутів, то й інша пара гострих кутів — також рівні між собою кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

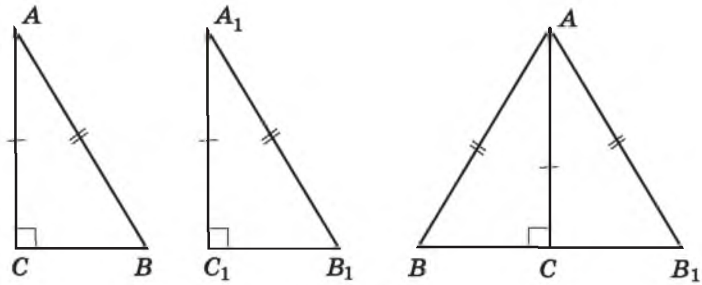
якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні;

якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні.

Т е о р е м а (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою). **Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 — прямі і $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (мал. 317). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

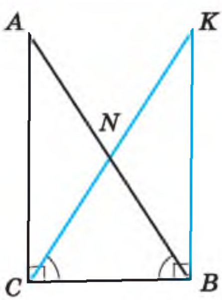
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C — з вершиною C_1 (мал. 317, праворуч). Оскільки $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90°$, то $\angle BCB_1$ — розгорнутий, а тому точки B, C, B_1 лежать на одній прямій. $\triangle ABB_1$ — рівнобедрений, бо $AB = AB_1$. AC — його висота, проведена до основи. Звідси AC є також і медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. ▲



Мал. 317

Розглянемо ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.



Мал. 318

Доведення. Проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, що $BK = CA$ (мал. 318). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ — прямокутні, BC — їх спільний катет, $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ — рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN — медіана і $CN = \frac{AB}{2}$, що й треба було довести. ▲

Який трикутник називають прямокутним? ● Які назви мають сторони прямокутного трикутника? ● Сформулюйте і доведіть властивості прямокутного трикутника. ● Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

А ще раніше...

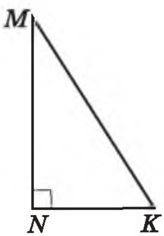
Про прямокутний трикутник згадується в папірусі Ахмеса. Деякі відомості про нього знали також вавилонські геометри. Ще тоді землеміри використовували ці властивості для визначення відстані на місцевості.

Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова «іпотейнуза» і перекладається як «що тягнеться під чим-небудь», «та, що стягує». Походить це слово, найімовірніше, від давньоєгипетських арф, струни яких натягувалися на кінцях двох взаємно перпендикулярних підставок.

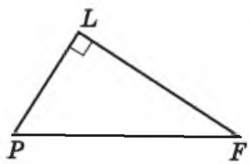
Термін «катет» походить від грецького слова «катетос», що перекладається як «схил», «перпендикуляр».

Евклід у своїх роботах для катетів використовував формулювання «сторони, що містять прямий кут», а для гіпотенузи — «сторона, що стягує прямий кут».

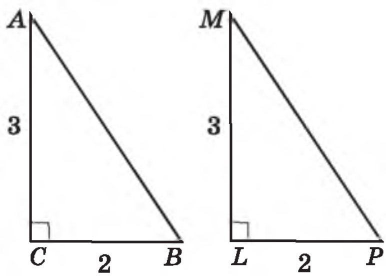
465. (*Усно*) 1) Як називається трикутник, зображений на малюнку 319?
2) Назвіть гіпотенузу і катети цього трикутника.
3) Яка зі сторін цього трикутника найдовша?



Мал. 319



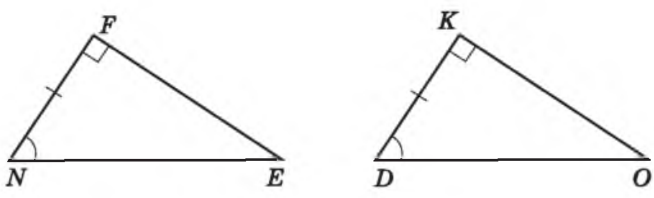
Мал. 320



Мал. 321

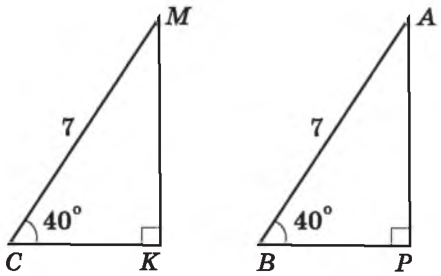
466. 1) Назвіть гіпотенузу і катети прямокутного трикутника *PFL* (мал. 320).
2) Яка сторона довша: *PL* чи *PF*; *LF* чи *PF*?

467. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 321 і 322 є рівними? Запишіть відповідні рівності.

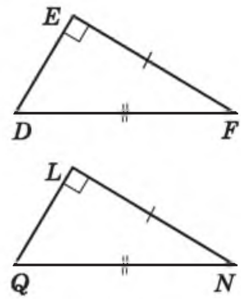


Мал. 322

468. За якими елементами є рівними прямокутні трикутники на малюнках 323 і 324? Запишіть відповідні рівності.



Мал. 323



Мал. 324

469. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює:

1) 17°; 2) 83°.

470. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює:

1) 79°; 2) 27°.

471. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

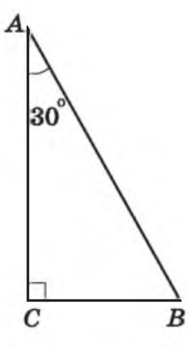
472. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

473. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (мал. 325). Знайдіть:

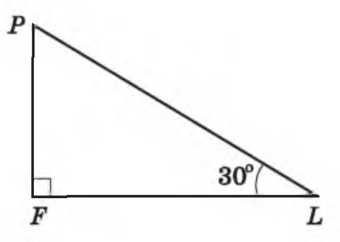
1) BC, якщо $AB = 12$ см; 2) AB, якщо $BC = 3$ дм.

474. У прямокутному трикутнику PFL ($\angle F = 90°$) $\angle L = 30°$ (мал. 326). Знайдіть:

1) PF, якщо $PL = 16$ дм; 2) PL, якщо $PF = 5$ см.



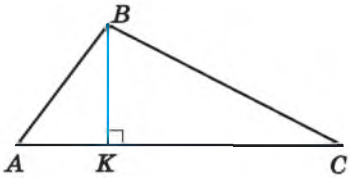
Мал. 325



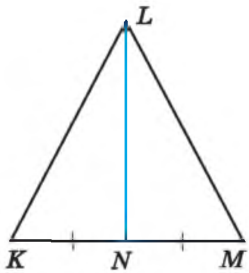
Мал. 326

475. На малюнку 327 BK — висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 37°$, $\angle KBC = 62°$.

476. На малюнку 328 KLM — рівнобедрений трикутник з основою KM, LN — його медіана. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 28°$.



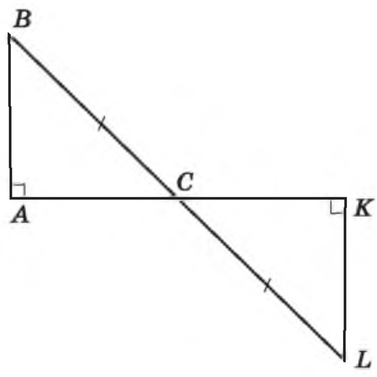
Мал. 327



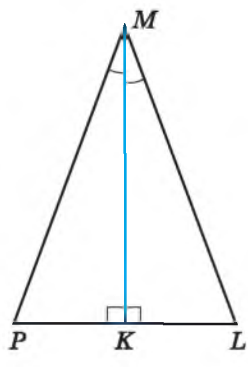
Мал. 328

477. На малюнку 329 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.

478. На малюнку 330 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.



Мал. 329



Мал. 330

479. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них на 28° більший за другий;
2) один з них у 5 разів менший за другий;
3) їх градусні міри відносяться як 2 : 3.

480. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 4 рази більший за другий;
2) один з них на 16° менший за другий;
3) їх градусні міри відносяться як 5 : 4.

481. Знайдіть менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 26°.

482. Знайдіть більший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 68°.

483. Доведіть, що точка, яка лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.

484. Кут між висотою прямокутного трикутника, проведеною до гіпотенузи, і одним з катетів дорівнює 32°. Знайдіть гострі кути трикутника.

485. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює 115°. Знайдіть гострі кути цього трикутника.

486. Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їх бічні сторони і висоти, проведені до основ.

487. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи і меншого катета — 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, що проведена до неї.

488. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута — 4 см. Знайдіть довжину катета, що лежить проти цього кута.

489. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

490. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри їх зовнішніх кутів відносяться як 2 : 3.

491. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з однаковими периметрами, то хоча б два кути трикутника між собою рівні.

492. Один з кутів трикутника на 20° менший за другий і втричі менший за третій. Знайдіть кожний з кутів трикутника.

493. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

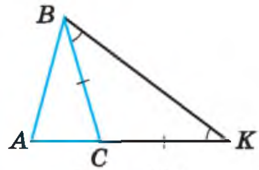
494. Позначте вісім точок і сполучіть їх відрізками так, щоб жодні два з них не перетиналися і з кожної точки виходило по чотири відрізки.

§ 20. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Розглянемо важливу властивість сторін трикутника.

Т е о р е м а (нерівність трикутника). **Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і доведемо, що його сторона, наприклад AB, менша від суми двох інших сторін AC і CB.



Мал. 331

1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (мал. 331). Тоді $\triangle BCK$ — рівнобедрений і тому $\angle CBK = \angle CKB$.

2) $\angle ABK > \angle CBK$, тому $\angle ABK > \angle AKB$. Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$. Але ж $AK = AC + CK = AC + BC$. Отже, $AB < AC + BC$.

Аналогічно можна довести, що $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$. Теорему доведено. ▲

Н а с л і д о к. **Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.**

Д о в е д е н н я. Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AB < AC + BC$. Віднявши від обох її частин, наприклад AC, матимемо: $AB - AC < BC$. Таку дію можна виконати, використовуючи властивості нерівностей, які розглядатимуться в курсі алгебри. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$. ▲

Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо $BC > |AB - AC|$.

З теореми про нерівність трикутника та наслідку з неї отримаємо важливе співвідношення між сторонами трикутника:

кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін, але більша за модуль їх різниці.

Наприклад, $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Задача 1. Дві сторони трикутника дорівнюють 0,7 см і 1,7 см. Знайти довжину третьої сторони, якщо її довжина дорівнює цілому числу сантиметрів.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай невідома сторона трикутника дорівнює a см. Тоді $1{,}7 - 0{,}7 < a < 1{,}7 + 0{,}7$, тобто $1 < a < 2{,}4$. Оскільки a — ціле число, то $a = 2$ (см).

В і д п о в і д ь. 2 см.

Задача 2. Периметр рівнобедреного трикутника 60 см, а дві його сторони відносяться як 2 : 5. Знайти сторони трикутника.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо сторони трикутника, відношення яких 2 : 5, як $2x$ см і $5x$ см. Оскільки невідомо, яка з них — основа, а яка — бічна сторона, розглянемо два випадки.

1. Основа дорівнює $5x$ см, а бічні сторони — по $2x$ см. Але тоді $2x + 2x < 5x$, що суперечить нерівності трикутника, тобто трикутника зі сторонами $2x$, $2x$ і $5x$ не існує.

2. Основа дорівнює $2x$ см, а бічні сторони — по $5x$ см. Для цього випадку нерівність трикутника виконується.

Отже, за умовою задачі маємо рівняння:

$$2x + 5x + 5x = 60, \ x = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді $2 \cdot 5 = 10$ (см) — основа, $5 \cdot 5 = 25$ (см) — бічна сторона.

В і д п о в і д ь. 10 см; 25 см; 25 см.

Сформулюйте теорему про нерівність трикутника та наслідок з неї. Якими співвідношеннями пов'язані між собою сторони трикутника?

495. Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 1 см, 2 см і 4 см; 2) 7 дм, 6 дм і 5 дм; 3) 3 см, 4 см і 7 см?

496. Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 2 дм, 5 дм і 7 дм; 2) 2 см, 3 см і 6 см; 3) 5 дм, 2 дм і 4 дм?

497. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,9 см і 8,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

498. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,9 см і 4,5 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

499. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:

1) 2, 3, 4; 2) 7, 8, 15; 3) 5, 3, 7?

500. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:

1) 5, 1, 4; 2) 5, 6, 7; 3) 8, 2, 11?

501. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Чи може бічна сторона цього трикутника дорівнювати 3 см?

502. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

503. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,5 см і 1,2 см. Яким може бути периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів?

504. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 14 см; 2) 15 см; 3) 16 см?

505. Периметр трикутника дорівнює 40 дм. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 21 дм; 2) 20 дм; 3) 19 дм?

506. Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 2 см більша за другу і на 4 см менша від третьої?

507. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 6 см менша від другої і на 1 см більша за третю?

508. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут A втричі менший від кута B і на 15° більший за кут C.

509. Доведіть, що два прямокутних трикутники рівні, якщо висота, проведена до гіпотенузи, і катет одного трикутника дорівнюють відповідно висоті, проведеній до гіпотенузи, і катету другого трикутника.

510. Коник-стрибунець може переміщуватися вздовж даної прямої на 4 см або 6 см (у будь-який бік). Чи зможе він за кілька стрибків опинитися в точці, що знаходиться від початкової на відстані:

1) 2018 см; 2) 2017 см?

Домашня самостійна робота № 4 (§ 17 – § 20)

1. Три кути трикутника можуть дорівнювати...

А) 20°, 20° і 150°; Б) 30°, 100° і 40°;
В) 50°, 60° і 70°; Г) 60°, 60° і 61°.

2. У $\triangle ABC$ $AB > AC$. Порівняйте $\angle B$ і $\angle C$ цього трикутника.

А) $\angle B < \angle C$; Б) $\angle B = \angle C$;
В) $\angle B > \angle C$; Г) порівняти неможливо.

3. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює 40°.

А) 30°; Б) 40°; В) 50°; Г) 60°.

4. Один з кутів трикутника дорівнює 72°. Знайдіть суму двох інших кутів трикутника.

А) 98°; Б) 108°; В) 118°; Г) визначити неможливо.

5. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А) 40°; Б) 50°; В) 60°; Г) 70°.

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,2 см. Якому цілому числу сантиметрів НЕ може дорівнювати третя сторона трикутника?

А) 2 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 8 см.

3 **7.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 30° менший від другого, а гіпотенуза трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть менший з його катетів.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 5 см; Г) 6 см.

8. У трикутнику два кути дорівнюють 60° і 50°. Знайдіть кут між прямими, що містять бісектриси цих кутів.

А) 125°; Б) 115°; В) 65°; Г) 55°.

9. Периметр трикутника дорівнює 16 см. Якою НЕ може бути довжина однієї з його сторін?

А) 8 см; Б) 7,5 см; В) 7 см; Г) 2 см.

4 **10.** Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює основі цього трикутника. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А) 60°; Б) 72°; В) 84°; Г) 96°.

11. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 7. Знайдіть менший з внутрішніх кутів трикутника.

А) 12°; Б) 24°; В) 60°; Г) інша відповідь.

12. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 10 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А) 6 см; Б) 8 см; В) 10 см; Г) 15 см.

Завдання для перевірки знань № 4 (§ 17 – § 20)

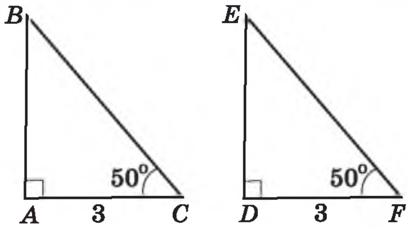
1 **1.** Знайдіть третій кут трикутника, якщо два з його кутів дорівнюють 30° і 80°.

2. Накресліть $\triangle PLK$ та його зовнішній кут при вершині P.

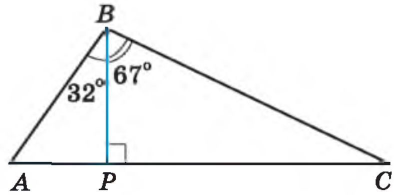
3. За якими елементами рівні між собою прямокутні трикутники, зображені на малюнку 332? Запишіть відповідні рівності.

2 **4.** Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

5. На малюнку 333 BP — висота трикутника ABC, $\angle ABP = 32°$, $\angle PBC = 67°$. Знайдіть кути трикутника ABC.



Мал. 332



Мал. 333

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 6,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

7. Один з кутів трикутника вдвічі менший за другий і на 16° більший за третій. Знайдіть кути трикутника.

8. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

9. У прямокутному трикутнику BCD $\angle C = 90°$, BM — бісектриса трикутника, $\angle CBD = 60°$. Знайдіть довжину катета CD, якщо $CM = 8$ см.

Додаткові вправи

10. Зовнішні кути трикутника відносяться як 4 : 5 : 6. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

11. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 3 см більша за другу і на 5 см менша від третьої?

Вправи для повторення розділу 3

До § 11

511. Накресліть прямокутний трикутник KLP. Запишіть назви вершин, сторін та кутів цього трикутника.

512. Одна сторона трикутника дорівнює 18 см, друга сторона на 6 см більша за першу, а третя сторона вдвічі менша від другої. Знайдіть периметр трикутника.

513. За допомогою транспортира та лінійки з поділками накресліть $\triangle MLP$, у якого $ML = 5$ см, $\angle M = 40°$, $\angle L = 80°$.

514. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої, а третя — складає 80 % від другої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

515. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $AB + AC = 12$ см, $AC + CB = 15$ см, $AB + BC = 13$ см.

До § 12

516. 1) Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони рівного йому трикутника.

2) Кути трикутника дорівнюють 40°, 60° і 80°. Знайдіть кути рівного йому трикутника.

517. Чи можна сумістити накладанням вертикальні кути?

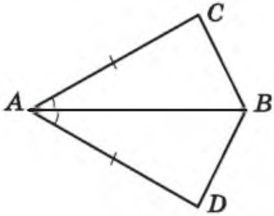
518. Чи можуть бути рівними трикутники, найбільші сторони яких не є рівними?

519. Дано: $\triangle ABC = \triangle ACB$, $AB = 7$ см, $BC = 4$ см. Знайти: P_{ABC}.

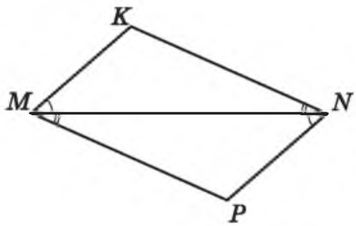
До § 13

520. Назвіть спільний елемент трикутників, зображених на малюнках 334 та 335, і ознаку, за якою ці трикутники рівні.

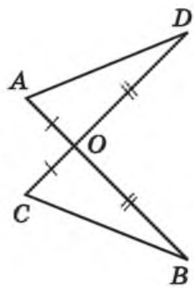
521. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$ (мал. 336), якщо $AO = CO$, $DO = OB$.



Мал. 334



Мал. 335



Мал. 336

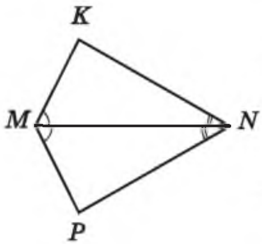
522. Доведіть, що $\triangle MKN = \triangle MPN$ (мал. 337), якщо $\angle KMN = \angle PMN$ і $\angle KNM = \angle PNM$.

523. На малюнку 338 $\angle MAB = \angle PDC$, $BA = CD$, $AK = KD$. Доведіть, що $BK = KC$.

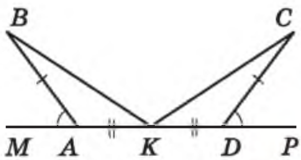
524. Щоб знайти відстань від пункту A до недосяжного пункту X (мал. 339), на березі позначають точки B і C так, щоб $\angle XAB = \angle CAB$ і $\angle XBA = \angle CBA$. Тоді $AX = AC$. Чому?

525. На малюнку 340 зображено фігуру, у якої $BC = EF$, $AD = CF$, $\angle BCF = \angle EFK$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

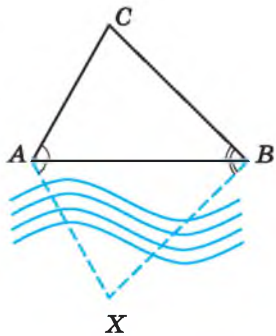
526. На сторонах кута A позначено точки B і C так, що $AB = AC$. $DC \perp AE$, $BE \perp AD$ (мал. 341). Доведіть, що: 1) $BD = CE$; 2) AO — бісектриса кута A.



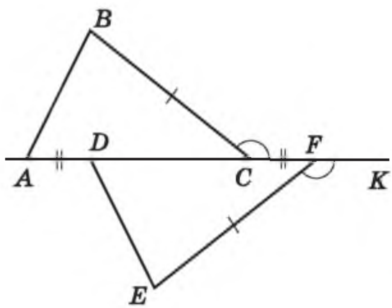
Мал. 337



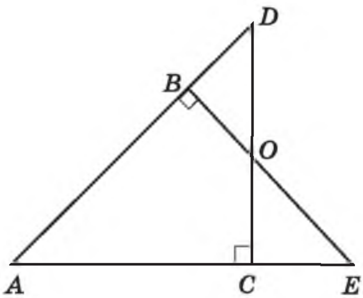
Мал. 338



Мал. 339



Мал. 340



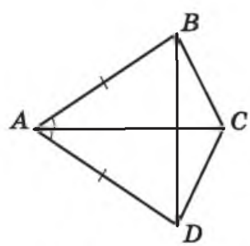
Мал. 341

До § 14

527. AK — основа рівнобедреного трикутника AKP.
1) $AP = 5$ см. Знайдіть PK.
2) $\angle A = 70°$. Знайдіть $\angle K$.

528. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона — 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

529. На малюнку 342 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доведіть, що $\triangle BCD$ — рівнобедрений.



Мал. 342

530. Основа і прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі та прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи будуть рівними між собою ці трикутники?

531. Основа та бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 4. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см.

532. $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ рівнобедрені зі спільною основою AB. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$.

До § 15

533. Як називають у трикутнику:

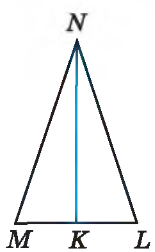
1) відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони;
2) перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, що містить протилежну сторону;
3) відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони?

534. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть висоту цього трикутника, проведену до основи; медіану цього трикутника, проведену до основи.

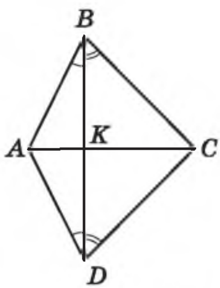
535. На малюнку 343 відрізок NK — медіана рівнобедреного трикутника MNL з основою ML. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

536. AM і A_1M_1 — відповідно медіани рівних між собою трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

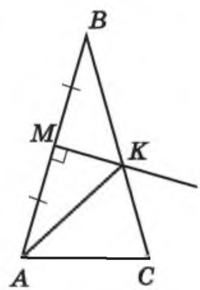
537. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику будь-яка точка проведеної до основи висоти, рівновіддалена від кінців основи трикутника.



Мал. 343



Мал. 344



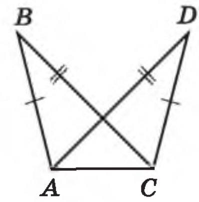
Мал. 345

538. На малюнку 344 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CBD = \angle CDB$. Доведіть, що $BD \perp AC$.

539. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = a$ см. З точки M — середини AB — проведено перпендикуляр до AB, який перетинає BC в точці K (мал. 345). Знайдіть довжину сторони AC та периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника AKC дорівнює b см ($b > a$).

До § 16

540. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 346), якщо $AB = CD$, $BC = AD$.



Мал. 346

541. Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні?

542. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

До § 17

543. Знайдіть кут C трикутника ABC, якщо:

1) $\angle A = 65°$, $\angle B = 29°$; 2) $\angle A = 37°$, $\angle B = 116°$.

544. На малюнку 347 CK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою CB. Знайдіть:

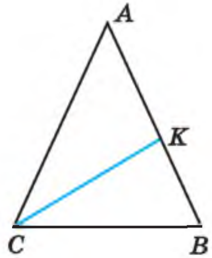
1) $\angle A$, якщо $\angle KCB = 32°$;

2) $\angle ACK$, якщо $\angle A = 56°$.

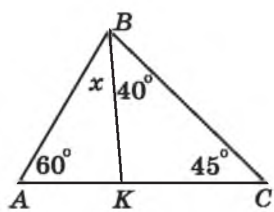
545. Визначте вид трикутника ABC за сторонами, якщо $\angle A = 76°$, $\angle B = 28°$.

546. За малюнком 348 знайдіть градусну міру кута x.

547. Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а два інших відносяться як 2 : 3. Знайдіть ці кути.



Мал. 347



Мал. 348

548. Знайдіть кут між двома прямими, що містять медіани рівностороннього трикутника.

549. Бісектриса одного з кутів трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут 16°, а менший з двох інших кутів трикутника дорівнює 50°. Знайдіть невідомі кути трикутника.

550. Знайдіть градусну міру кута трикутника, якщо він:

1) дорівнює $\frac{1}{5}$ від суми градусних мір двох інших кутів;

2) на 40° менший від суми двох інших кутів.

551. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису AK. Знайдіть:

1) $\angle B$, якщо $\angle AKB = 60°$;

2) $\angle C$, якщо $\angle AKC = 111°$.

До § 18

552. Накресліть $\triangle MNK$ та по одному зовнішньому куту при кожній вершині цього трикутника.

553. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 150°. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

554. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:

1) 102°; 2) 80°; 3) 75°?

555. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 115° і 137°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

556. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник — рівнобедрений.

557. Два внутрішніх кути трикутника відносяться як 2 : 3, а зовнішній кут третього кута дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника.

558. Сума внутрішніх кутів рівнобедреного трикутника разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 260°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

559. Доведіть, що не існує трикутника, у якому зовнішні кути при кожній з вершин більші за 120°.

560. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що трикутник — прямокутний.

До § 19

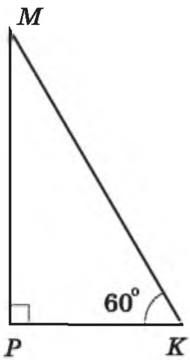
561. Укажіть умови, з яких слідує рівність двох прямокутних трикутників:

1) катет одного трикутника дорівнює катету другого трикутника;
2) катет і прилеглий до нього кут одного трикутника дорівнює катету і прилеглому до нього куту другого трикутника;
3) два гострі кути одного трикутника дорівнюють двом гострим кутам другого;
4) катет і гіпотенуза одного трикутника дорівнюють катету і гіпотенузі другого.

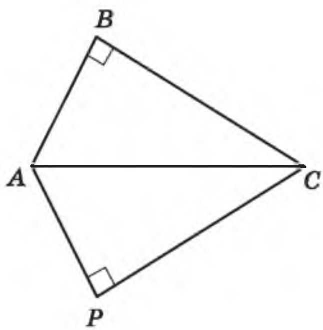
562. У прямокутному трикутнику MKP $\angle K = 60°$ (мал. 349). Знайдіть:

1) $\angle M$;
2) PK, якщо $MK = 24$ см;
3) MK, якщо $PK = 30$ мм.

563. На малюнку 350 $\angle B = \angle P = 90°$, CA — бісектриса кута C. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle APC$.



Мал. 349



Мал. 350

564. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 7 : 3.

565. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено бісектрису і висоту, кут між якими 15°. Знайдіть гострі кути трикутника.

566. У прямокутному трикутнику ABC $AC = BC$. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 5 см.

567. Знайдіть кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

568. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 24 см прилягає до кута 30°. Знайдіть бісектрису другого гострого кута трикутника.

569. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, — *a* см. Знайдіть основу трикутника.

570. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть гіпотенузу та менший катет трикутника.

571. Доведіть, що в нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини, навпіл.

До § 20

572. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Чи може третя сторона трикутника дорівнювати:

1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см;
4) 10 см; 5) 13 см; 6) 15 см?

573. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 8,7 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона і якому найбільшому?

574. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки D і E, причому точка D — середина AB. $AE = 6$ см, $DE = 4$ см. Чи може довжина сторони AB дорівнювати 21 см?

575. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють:

1) 4 см і 7 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 12 см і 6 см.

576. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 51 см, а дві його сторони відносяться як 3 : 7. Знайдіть сторони трикутника.

Розділ 4 КОЛО І КРУГ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття кола, круга та їх елементів;
- **ознайомитеся** з поняттями дотичної до кола, серединного перпендикуляра до відрізка, кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник; поняттям геометричного місця точок;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості до розв'язування задач.

§ 21. КОЛО. КРУГ

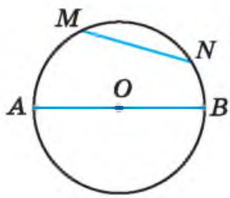
У попередніх класах ви вже знайомилися з поняттями кола та його елементів. Пригадаємо їх.

Колом **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.**

Цю точку називають *центром* кола. Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.

На малюнку 351 зображено коло із центром у точці O і радіусом OK. З означення кола випливає, що всі радіуси одного й того самого кола мають однакову довжину. Радіус кола часто позначають буквою r.

Мал. 351



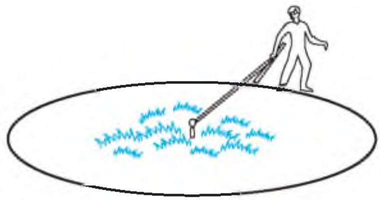
Мал. 352

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою***. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром***. На малюнку 352 відрізок MN є хордою кола, а відрізок AB — його діаметром. Оскільки $AB = OA + OB$, приходимо до висновку, що довжина діаметра вдвічі більша за довжину радіуса.

Діаметр кола часто позначають буквою d. Отже, $d = 2r$. Крім того, центр кола є серединою будь-якого діаметра.

Коло на папері зображують за допомогою циркуля (мал. 353). На місцевості для побудови кола можна використати мотузку (мал. 354).

Мал. 353



Мал. 354

Розглянемо деякі властивості елементів кола.

Т е о р е м а 1 (про порівняння діаметра і хорди). **Діаметр є найбільшою з хорд.**

Д о в е д е н н я. Нехай AB — довільний діаметр кола, радіус якого дорівнює r, а MN — відмінна від діаметра хорда кола (мал. 355). Доведемо, що $AB > MN$.

$AB = 2r$. У трикутнику MON, використовуючи нерівність трикутника, маємо $MN < MO + ON$. Отже, $MN < 2r$. Тому $AB > MN$. Теорему доведено. ▲

Нехай точка P не належить відрізку AB. Тоді кут APB називають ***кутом, під яким відрізок AB видно з точки P*** (мал. 356).

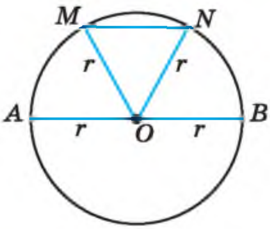
Т е о р е м а 2 (про кут, під яким видно діаметр з точки кола). **Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.**

Д о в е д е н н я. Нехай AB — діаметр кола, а P — довільна точка кола (мал. 356). Доведемо, що $\angle APB = 90°$.

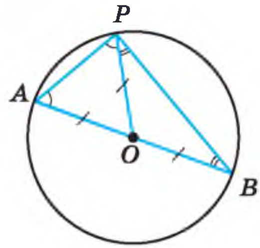
1) У трикутнику AOP $AO = PO$ (як радіуси). Тому $\triangle AOP$ — рівнобедрений і $\angle OAP = \angle OPA$.

2) Аналогічно $\angle OPB = \angle OBP$.

3) Отже, $\angle APB = \angle A + \angle B$. Але ж у $\triangle APB$: $\angle APB + \angle A + \angle B = 180°$. Тому $\angle APB + \angle APB = 180°$; $2\angle APB = 180°$; $\angle APB = 90°$. Теорему доведено. ▲



Мал. 355



Мал. 356

Т е о р е м а 3 (властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди). **Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.**

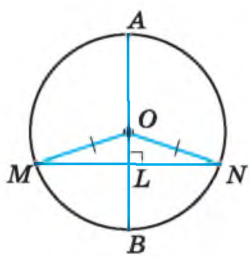
Д о в е д е н н я. Нехай AB — діаметр кола, MN — відмінна від діаметра хорда кола, $AB \perp MN$ (мал. 357). Доведемо, що $ML = LN$, де L — точка перетину AB і MN.

$\triangle MON$ — рівнобедрений, бо $MO = ON$ (як радіуси). OL — його висота, проведена до основи. Тому OL є також і медіаною. Отже, $ML = LN$.

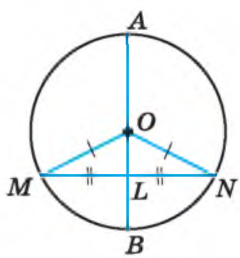
Якщо хорда MN є діаметром кола, то твердження теореми є очевидним. Теорему доведено. ▲

Т е о р е м а 4 (властивість діаметра кола, що проходить через середину хорди). **Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.**

Д о в е д е н н я. Нехай діаметр AB проходить через точку L — середину хорди MN, яка не є діаметром кола (мал. 358). Доведемо, що $AB \perp MN$.



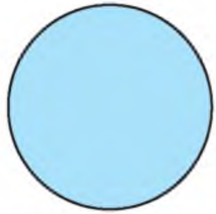
Мал. 357



Мал. 358

$\triangle MON$ — рівнобедрений, бо $MO = NO$ (як радіуси). OL — медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому OL є також висотою. Отже, $OL \perp MN$, а тому і $AB \perp MN$. Теорему доведено. ▲

Коло разом з його внутрішньою областю називають *кругом*.


Мал. 359

На малюнку 359 зображено круг.

Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею даного круга.

Задача. Д а н о: O — центр кола, $\angle LKM = 25°$ (мал. 360).
З н а й т и: $\angle MOL$.

Р о з в ' я з а н н я.

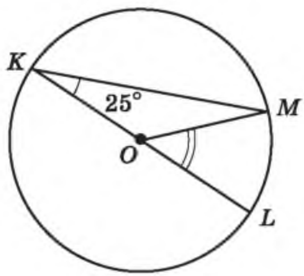
1) Оскільки точка O — центр кола, то $OK = OM$ (як радіуси). Тоді $\triangle KOM$ — рівнобедрений, отже, $\angle M = \angle K = 25°$.

2) $\angle MOL$ — зовнішній для $\triangle KOM$, тому за властивістю зовнішнього кута $\angle MOL = \angle K + \angle M = 2 \cdot 25° = 50°$.

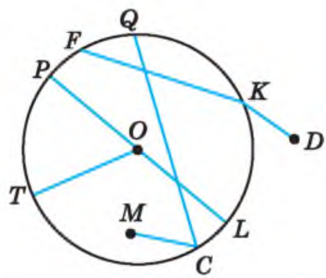
В і д п о в і д ь. 50°.

Що називають колом; центром кола; радіусом кола? Який відрізок називають хордою кола, а який — діаметром кола? Що називають кругом? Сформулюйте і доведіть теореми про властивості елементів кола.

577. (*Усно*) Точка O — центр кола (мал. 361). Які з відрізків на малюнку є: 1) хордами кола; 2) діаметрами кола; 3) радіусами кола?



Мал. 360



Мал. 361

578. Знайдіть на малюнку 361 хорду, що проходить через центр кола. Як називають таку хорду?

579. Обчисліть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:

1) 5 см; 2) 4,7 дм.

580. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:

1) 8 мм; 2) 3,8 см.

581. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:

1) 6 дм; 2) 2,4 см.

582. Обчисліть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:

1) 20 см; 2) 5,6 дм.

583. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN та хорду MK. Знайдіть $\angle NKM$.

584. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,6 см. Проведіть у ньому діаметр AB та хорду BD. Перевірте за допомогою косинця або транспортира, що кут BDA — прямий.

585. Усередині кола взято довільну точку, відмінну від центра. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку?

586. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести?

587. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

1) 2 см; 2) 5 см; 3) 7 см; 4) 9,8 см; 5) 10,2 см?

588. Радіус кола дорівнює 4 дм. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

1) 1 дм; 2) 4 дм; 3) 6,7 дм; 4) 7,95 дм; 5) 8,3 дм?

589. У колі проведено діаметри AB і CD (мал. 362). Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle BOC$.

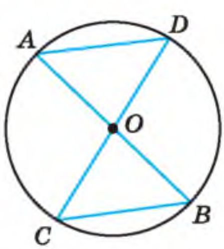
590. У колі із центром O проведено хорди MN і PK та діаметр PM. $\angle POK = \angle MON$ (мал. 363). Доведіть, що $\triangle MON = \triangle POK$.

591. На малюнку 364 точка O — центр кола. Знайдіть градусну міру:

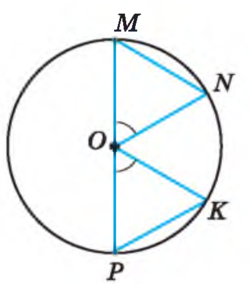
1) кута O, якщо $\angle A = 52°$; 2) кута B, якщо $\angle O = 94°$.

592. На малюнку 364 точка O — центр кола. Знайдіть градусну міру:

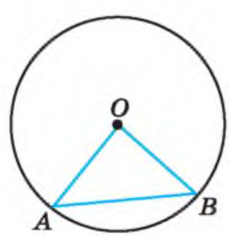
1) кута O, якщо $\angle B = 48°$; 2) кута A, якщо $\angle O = 102°$.



Мал. 362



Мал. 363

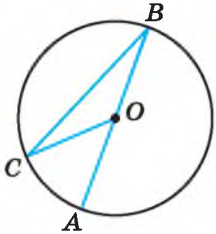


Мал. 364

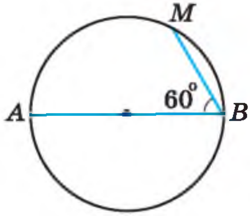
593. На малюнку 365 точка O — центр кола, $\angle COA = 32°$. Знайдіть $\angle CBA$.

594. На малюнку 365 точка O — центр кола, $\angle BCO = 18°$. Знайдіть $\angle AOC$.

595. Дано коло радіуса 5 см. 1) Проведіть у ньому хорду завдовжки 6 см. Скільки таких хорд можна провести?
2) Точка A належить даному колу. Скільки хорд завдовжки 6 см можна провести з даної точки?



Мал. 365



Мал. 366

596. У колі на малюнку 366 AB — діаметр, $\angle ABM = 60°$, $BM = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

597. У колі на малюнку 366 AB — діаметр, $\angle ABM = 60°$, $AB = 18$ см. Знайдіть довжину хорди MB.

598. Доведіть, що коли хорди рівновіддалені від центра кола, то вони рівні.

599. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

600. Хорда кола перетинає його діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на відрізки завдовжки 4 см і 7 см. Знайдіть відстань від кінців хорди до прямої, що містить діаметр кола.

601. Побудуйте пряму a, точку M, що знаходиться на відстані 3 см від прямої, та точку N, що знаходиться на відстані 2 см від прямої, так, щоб відрізок MN перетинав пряму.

602. Два рівних між собою тупих кути мають спільну сторону, а дві інші сторони взаємно перпендикулярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.

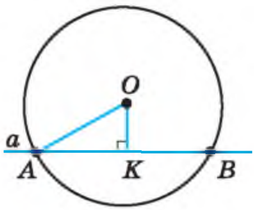
603. Доведіть рівність двох гострокутних рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

604. У коробці шоколадні цукерки квадратної форми викладено у вигляді квадрата в один шар. Марійка з'їла всі цукерки по периметру квадрата — всього 20 цукерок. Скільки цукерок залишилось у коробці?

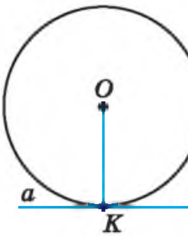
§ 22. ДОТИЧНА ДО КОЛА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо взаємне розташування прямої і кола.

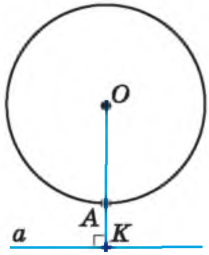
Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 367), одну спільну точку (мал. 368) або не мати спільних точок (мал. 369).



Мал. 367



Мал. 368



Мал. 369

Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 367 *OK* — відстань від центра кола — точки *O* — до січної. У прямокутному трикутнику *OKA* сторона *OK* є катетом, а *AO* — гіпотенузою. Тому *OK* < *OA*. Отже, ***відстань від центра кола до січної менша від радіуса.***

Дотичною **до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю точку називають *точкою дотику*.**

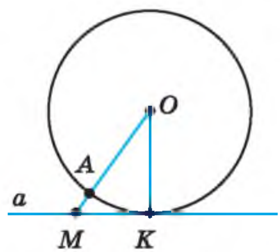
На мал. 368 пряма *a* — дотична до кола, *K* — точка дотику.

Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань *OK* більша за радіус кола *OA* (мал. 369). ***Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус.***

Т е о р е м а 1 (властивість дотичної). **Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.**

Д о в е д е н н я. Нехай пряма *a* дотична до кола із центром у точці *O*, точка *K* — точка дотику (мал. 370). Доведемо, що $a \perp OK$.

Припустимо, що пряма *a* не є перпендикулярною до *OK*. Проведемо з точки *O* перпендикуляр *OM* до прямої *a*. Тоді *OM* — катет прямокутного трикутника *KOM*. Оскільки у прямої з колом лише одна спільна точка *K*, то точка *M*, що належить прямій *a*, лежить поза колом. Тому довжина відрізка *OM* більша за довжину відрізка *OA*, який є



Мал. 370

радіусом кола. Оскільки $OA = OK$ (як радіуси), то $OM > OK$. Але ж, за припущенням, OM — катет прямокутного трикутника KOM, а OK — його гіпотенуза. Прийшли до протиріччя зі співвідношенням між катетом і гіпотенузою прямокутного трикутника (див. § 19, властивість 2).

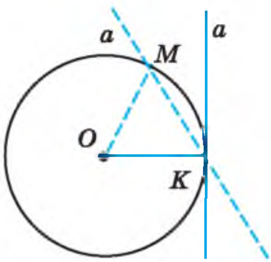
Отже, наше припущення є неправильним, тому $a \perp OK$.

Теорему доведено. ▲

Н а с л і д о к. Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). **Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до даного кола.**

Д о в е д е н н я. Нехай OK — радіус кола із центром у точці O. Пряма a проходить через точку K так, що $a \perp OK$ (мал. 371). Доведемо, що a — дотична до кола.



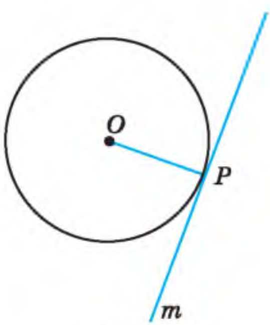
Мал. 371

Припустимо, що пряма a має з колом ще одну спільну точку — точку M. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і $\triangle OMK$ — рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90°$. Отримали, що в трикутнику OMK є два прямих кути, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

Наше припущення неправильне. Отже, пряма a не має інших спільних точок з колом, окрім точки K. Тому пряма a є дотичною до кола.

Теорему доведено. ▲

Задача. Через дану точку P кола із центром O проведіть дотичну до цього кола (мал. 372).



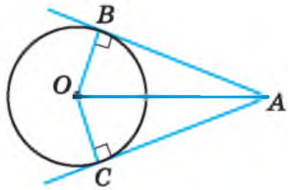
Мал. 372

Р о з в ' я з а н н я. Проведемо радіус OP, а потім побудуємо пряму m, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма m є дотичною до кола.

Розглянемо дві дотичні до кола із центром у точці O, які проходять через точку A і дотикаються до кола в точках B і C (мал. 373). Відрізки AB і AC називають *відрізками дотичних, проведених з точки A*.

Т е о р е м а 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). **Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.**

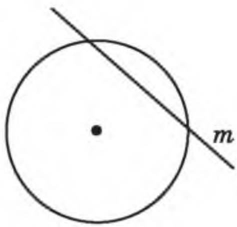
Д о в е д е н н я. На малюнку 373 трикутники OBA і OCA — прямокутні, $OB = OC$ (як радіуси), OA — спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $AB = AC$. Теорему доведено. ▲



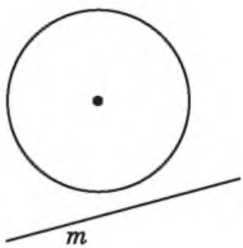
Мал. 373

Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? • Яку пряму називають січною до кола? • Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? • Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? • Яку пряму називають дотичною до кола? • Сформулюйте і доведіть властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

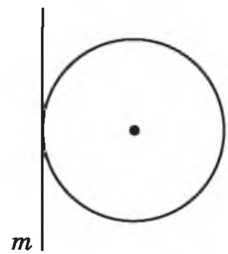
1 **605.** (*Усно*) На якому з малюнків 374–376 пряма m є дотичною до кола, а на якому — січною?



Мал. 374



Мал. 375



Мал. 376

606. (*Усно*) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:

1) на колі; 2) поза колом; 3) всередині кола?

2 **607.** Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку P. За допомогою косинця проведіть через точку P дотичну до цього кола.

608. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,5 см, позначте на ньому точку M. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну через точку M до цього кола.

609. Радіус кола дорівнює 8 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

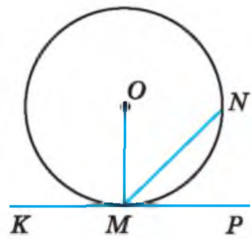
1) 5 см; 2) 8 см; 3) 9 см?

610. Радіус кола дорівнює 2 дм. Як розміщені пряма b і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 2,7 дм; 2) 2 дм; 3) 1,8 дм?

611. На мал. 377 KP — дотична до кола, точка O — центр кола. Знайдіть:

1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 35°$;
2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 50°$.



Мал. 377

612. На мал. 377 KP — дотична до кола, точка O — центр кола. Знайдіть:

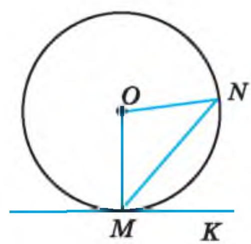
1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 52°$;
2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 135°$.

613. З точки A до кола із центром у точці O проведено дві дотичні AB і AC (B і C — точки дотику). Доведіть, що промінь OA — бісектриса кута BOC.

614. З точки P до кола із центром у точці Q проведено дотичні PM і PN. Доведіть, що промінь PQ — бісектриса кута MPN.

615. Пряма MK — дотична до кола, точка O — центр кола (мал. 378). Знайдіть $\angle NMK$, якщо $\angle MON = 82°$.

616. Пряма MK — дотична до кола, точка O — центр кола (мал. 378). Знайдіть $\angle NOM$, якщо $\angle KMN = 53°$.



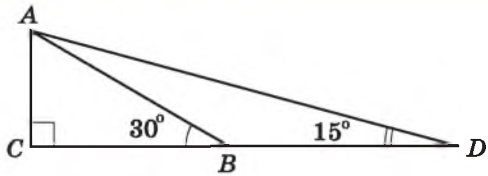
Мал. 378

617. З точки M, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки M до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

618. Прямі MN і MK дотикаються до кола із центром O в точках N і K. Знайдіть NK, якщо $\angle OMN = 30°$, $MN = 7$ см.

619. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

620. На малюнку 379 $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 30°$, $\angle ADB = 15°$, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.



Мал. 379

621. Поставте п’ять шашок на шахову дошку (розмір якої 8×8) так, щоб будь-який квадрат, що складається з дев’яти клітинок, містив тільки одну шашку.

§ 23. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

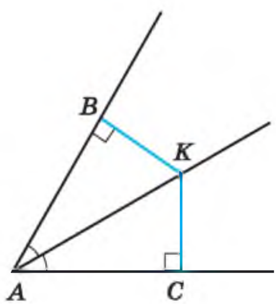
Т е о р е м а 1 (властивість бісектриси кута). **Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.**

Д о в е д е н н я. Виберемо на бісектрисі кута A довільну точку K і проведемо з точки K перпендикуляри KB і KC до сторін кута (мал. 380). Тоді KB і KC — відстані від точки K до сторін кута A. Доведемо, що $KB = KC$.

Розглянемо $\triangle AKB$ і $\triangle AKC$ ($\angle B = \angle C = 90°$). AK — їх спільна гіпотенуза, $\angle BAK = \angle CAK$ (бо AK — бісектриса).

Отже, $\triangle AKB = \triangle AKC$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$.

Теорему доведено. ▲



Мал. 380

***Коло* називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *описаним навколо кола.*

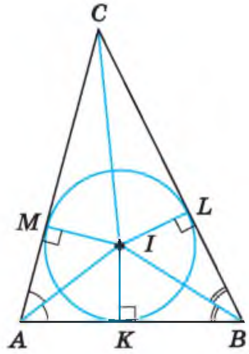
Т е о р е м а 2 (про коло, вписане в трикутник). **У будь-який трикутник можна вписати коло.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний $\triangle ABC$. Нехай бісектриси кутів A і B цього трикутника перетинаються в точці I (мал. 381). Доведемо, що ця точка є центром вписаного у трикутник кола.

1) Оскільки точка I лежить на бісектрисі кута A, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC трикутника, тобто $IM = IK$, де M і K — основи перпендикулярів, проведених із точки I до сторін AC і AB відповідно.

2) Аналогічно $IK = IL$, де L — основа перпендикуляра, проведеного з точки I до сторони BC.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, проходить через точки M, K і L. Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола в точках M, K і L, оскільки перпендикулярні до радіусів IM, IK і IL.



Мал. 381

4) Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, є вписаним у $\triangle ABC$.

Теорему доведено. ▲

Н а с л і д о к 1. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Д о в е д е н н я. За доведенням попередньої теореми точка I — точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I.

Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 381).

Оскільки $IM = IL$, а CI — спільна гіпотенуза цих трикутників, то $\triangle CMI = \triangle CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle MCI = \angle LCI$ (як відповідні кути рівних трикутників), а CI — бісектриса кута C трикутника ABC.

Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника ABC проходять через точку I, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ▲

Нагадаємо, що точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.

Н а с л і д о к 2. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.

Задача. Коло, вписане у $\triangle ABC$, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC — у точці L, а до сторони CA — у точці M. Доведіть, що:

$$AK = AM = p - BC;\ BK = BL = p - AC;\ CM = CL = p - AB,$$

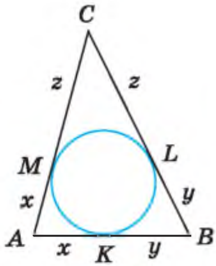
де $p = \frac{AB + AC + BC}{2}$ — півпериметр трикутника ABC.

Д о в е д е н н я. За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (мал. 382).

Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$.

Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$. Тому $p = x + y + z$, звідки $x = p - (y + z)$; тобто $x = p - BC$. Маємо: $AM = AK = p - BC$.

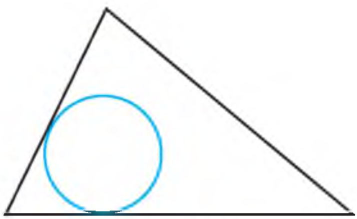
Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$. ▲

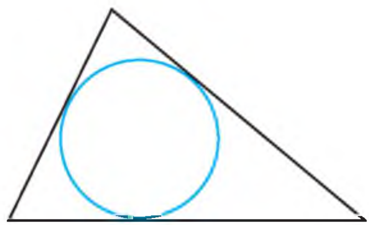


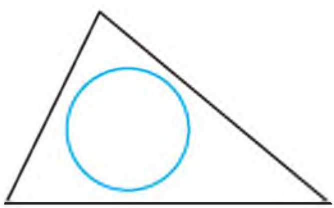
Мал. 382

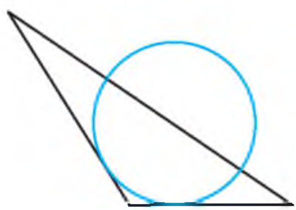
Сформулюйте і доведіть властивість бісектриси кута. Яке коло називають вписаним у трикутник? Сформулюйте і доведіть теорему про коло, вписане в трикутник, та наслідок 1 з неї. Сформулюйте наслідок 2.

622. (*Усно*) На яких з малюнків 383–386 зображено коло, вписане у трикутник?


Мал. 383


Мал. 384


Мал. 385


Мал. 386

623. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

624. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

625. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 381). Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle IBK = 35°$, $\angle MCI = 25°$.

626. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 381). $\angle CAB = 70°$, $\angle CBA = 60°$. Знайдіть кут MCI.

627. На малюнку 381 точка I — центр кола, вписаного у різносторонній трикутник ABC; M, K і L — точки дотику. Знайдіть усі пари рівних трикутників на цьому малюнку.

628. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до сторін кута, лежить на бісектрисі цього кута.

629. Накресліть кут градусної міри 110°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса, тобто побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

630. Накресліть кут градусної міри 70°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса.

631. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що це рівнобедрений трикутник.

632. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник є рівнобедреним.

633. У $\triangle ABC$ вписано коло, яке дотикається до сторін AB, AC і BC в точках P, F і M відповідно. Знайдіть AP, PB, BM, MC, CF і FA, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 12$ см.

634. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 6 см і 8 см.

635. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 3 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

636. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

637. Доведіть, що висоти, проведені до бічних сторін гострокутного рівнобедреного трикутника, між собою рівні.

638. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

639. Квадрат розрізали на вісім квадратів. Чи обов'язково п'ять з них рівні між собою?

§ 24. КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

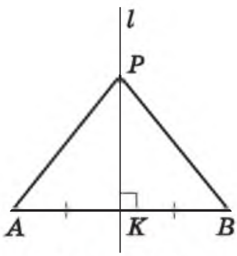
Серединним перпендикуляром до відрізка **називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.**

На малюнку 387 пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Т е о р е м а 1 (властивість серединного перпендикуляра до відрізка). **Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.**

Д о в е д е н н я. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, K — середина цього відрізка (мал. 387). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено. ▲



Мал. 387

Коло **називають** ***описаним навколо трикутника*****, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *вписаним у коло*.

Т е о р е м а 2 (про коло, описане навколо трикутника). **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\triangle ABC$. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються у точці O (мал. 388). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.

1) Точка O лежить на серединному перпендикулярі до AB, тому вона рівновіддалена від вершин A і B, тобто $OA = OB$.

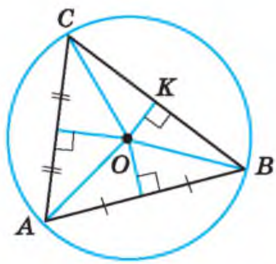
2) Аналогічно $OA = OC$, оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до AC.

3) Маємо: $OA = OB = OC$. Тому коло із центром у точці O проходить через вершини A, B і C трикутника ABC, а відрізки OA, OB і OC є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC.

Теорему доведено. ▲

Н а с л і д о к 1. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Д о в е д е н н я. Проведемо з точки O перпендикуляр OK до сторони BC (мал. 388). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, що проведена до основи BC. Тому він також є і медіаною. Відрізок OK лежить на серединному перпендикулярі до сторони BC. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника ABC проходять через точку O, тобто перетинаються в одній точці. Наслідок доведено. ▲



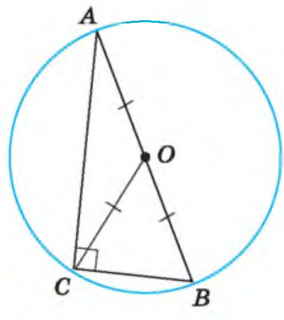
Мал. 388

Н а с л і д о к 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Задача. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи.

Д о в е д е н н я. Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90°$), CO — його медіана (мал. 389). Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи (див. § 19, властивість 5), то $CO = \frac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = BO = CO$.

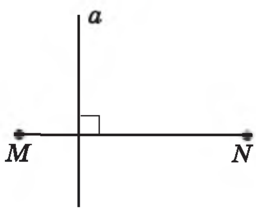
Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центром якого є точка O, а радіусом — OA, проходить через усі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC. ▲



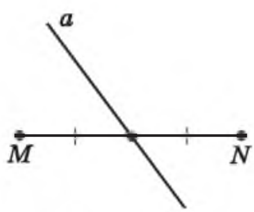
Мал. 389

Що називають серединним перпендикуляром до відрізка? ● Сформулюйте і доведіть властивість серединного перпендикуляра до відрізка. ● Яке коло називають описаним навколо трикутника? ● Сформулюйте і доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника, та наслідок 1 з неї. ● Яка саме точка є центром кола, описаного навколо трикутника?

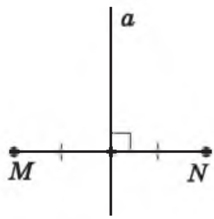
1 640. (*Усно*) На яких з малюнків 390–392 пряма a є серединним перпендикуляром до відрізка MN?



Мал. 390

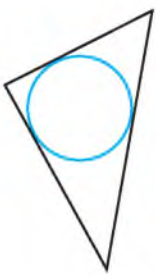


Мал. 391



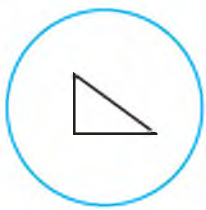
Мал. 392

641. На якому з малюнків 393–396 зображено коло, описане навколо трикутника?

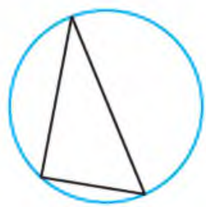


Мал. 393

Мал. 394



Мал. 395



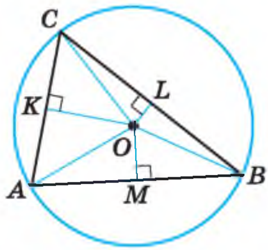
Мал. 396

2 642. 1) Накресліть відрізок MN, довжина якого 5,6 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка MN.

2) Позначте деяку точку P, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $PM = PN$.

643. 1) Накресліть відрізок AB завдовжки 4,8 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Позначте деяку точку C, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $CA = CB$.



Мал. 397

644. На малюнку 397 точка O — центр кола, описаного навколо різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі пари рівних трикутників на цьому малюнку.

645. Скільки кіл можна провести через:

1) одну точку;
2) дві точки;
3) три точки, що не лежать на одній прямій?

646. 1) Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

647. Накресліть трикутник, два кути якого дорівнюють 60° і 70°. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

648. 1) Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

649. Накресліть рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

650. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

651. У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

652. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, удвічі більший за радіус кола, вписаного в нього.

653. LM — діаметр кола, хорди KL і KM — рівні між собою. Знайдіть кути трикутника KLM.

654. I — точка перетину бісектрис AM і BN рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. Доведіть, що $IN = IM$.

655. Відрізок завдовжки 32 см поділено двома точками на три не рівних між собою відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

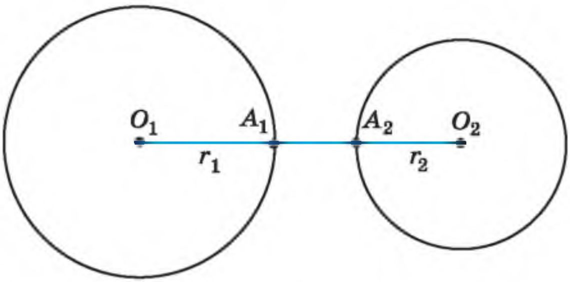
§ 25. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ

Розглянемо взаємне розміщення двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2 і радіусами r_1 і r_2 відповідно.

I. *Два кола можуть не перетинатися*, тобто не мати спільних точок (мал. 398 і 399). Можливі два випадки їх розміщення:

1. На малюнку 398 відстань між центрами кіл більша за суму радіусів:

$O_1O_2 = O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 = r_1 + A_1A_2 + r_2 > r_1 + r_2$. Отже, $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

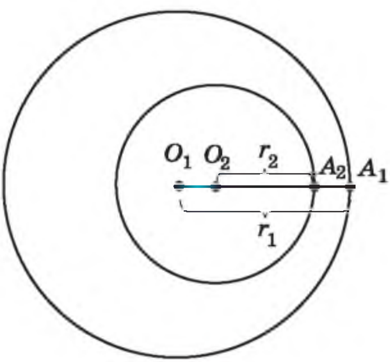


Мал. 398

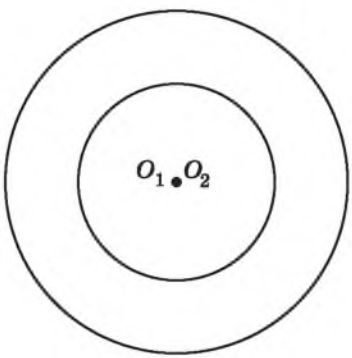
2. На малюнку 399 $O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_2 + A_2A_1$; $r_1 = O_1O_2 + r_2 + A_2A_1$. Тому $O_1O_2 = (r_1 - r_2) - A_2A_1 < r_1 - r_2$. Отже, $O_1O_2 < r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$, тобто відстань між центрами кіл менша за різницю радіусів.

Два кола називають ***концентричними***, якщо вони мають спільний центр (мал. 400). У цьому випадку $O_1O_2 = 0$.

Очевидно, що концентричними може бути будь-яка кількість кіл.



Мал. 399

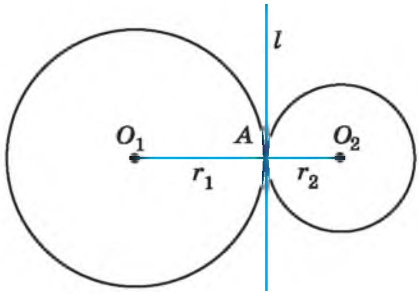


Мал. 400

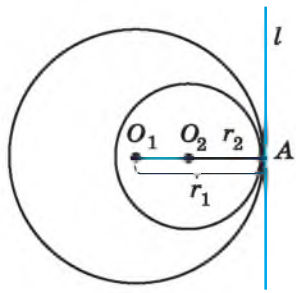
II. *Два кола можуть мати одну спільну точку* (мал. 401 і 402). У такому разі кажуть, що кола *дотикаються*, а спільну точку називають *точкою дотику кіл*. Можливі два випадки такого розміщення.

1. Кола мають зовнішній дотик. Дотик двох кіл називають *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від точки дотику (мал. 401). У цьому випадку:

1) $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = r_1 + r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює сумі їх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.



Мал. 401



Мал. 402

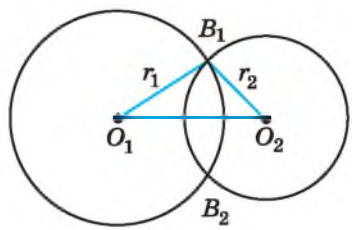
2. Кола мають внутрішній дотик. Дотик двох кіл називають *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від точки дотику (мал. 402). У цьому випадку:

1) $O_1O_2 = O_1A - O_2A = r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює різниці їх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

III. *Два кола можуть мати дві спільні точки* (мал. 403), тобто кола *перетинаються*. У цьому випадку відстань між центрами кіл менша за суму їх радіусів. Дійсно, за нерівністю трикутника і наслідком з неї для трикутника $O_1B_1O_2$ маємо: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, де $r_1 \geqslant r_2$.

Задача. Відстань між центрами двох кіл $O_1O_2 = 10$ см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо:

1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см;
2) $r_1 = 8$ см, $r_2 = 4$ см;
3) $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см.



Мал. 403

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки 10 = 6 + 4, тобто $O_1O_2 = r_1 + r_2$, то кола дотикаються (зовнішній дотик кіл);

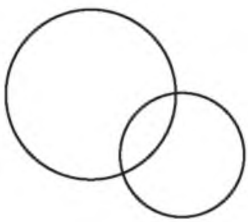
2) Оскільки 8 − 4 < 10 < 8 + 4, тобто $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, то кола перетинаються;

3) Оскільки 10 > 5 + 3, тобто $O_1O_2 > r_1 + r_2$, то кола не перетинаються.

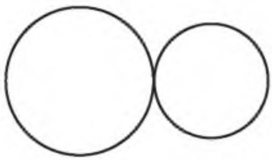
В і д п о в і д ь: 1) дотикаються; 2) перетинаються; 3) не перетинаються.

Що означає: два кола не перетинаються? Що означає: кола дотикаються? Який дотик кіл називають зовнішнім, а який — внутрішнім? Що означає: два кола перетинаються?

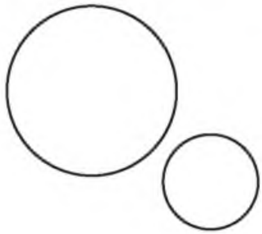
656. Що можна сказати про взаємне розміщення кіл на малюнках 404–406?



Мал. 404



Мал. 405



Мал. 406

657. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 2 см, так, щоб вони:

1) мали внутрішній дотик; 2) перетиналися;
3) були концентричними.

658. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 2 см і 1,5 см, так, щоб вони:

1) мали зовнішній дотик; 2) не перетиналися.

659. Накресліть відрізок завдовжки 4 см. Побудуйте два кола, що мають зовнішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

660. Накресліть відрізок завдовжки 2 см. Побудуйте два кола, що мають внутрішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

661. Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

662. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

1) зовнішній дотик; 2) внутрішній дотик.

663. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5.

664. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їх центрами 15 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 3.

665. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:
1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см;
3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.

666. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:
1) 7 см і 5 см; 2) 16 см і 2 см;
3) 10 см і 5 см; 4) 7 см і 7 см.

667. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки O_1 і O_2 — центри цих кіл. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

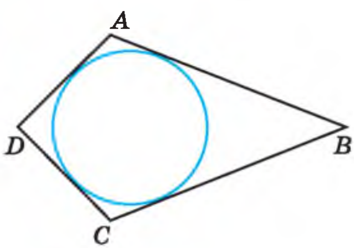
668. Два кола перетинаються в точках C і D. Точки O_1 і O_2 — центри кіл. Доведіть, що промінь O_1O_2 — бісектриса кута CO_1D.

669. Три кола попарно мають зовнішній дотик. Відрізки, що сполучають їх центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

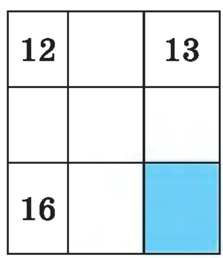
670. Три кола попарно дотикаються зовні. Радіус одного з кіл дорівнює 6 см, а відрізок, що сполучає центри двох інших кіл дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

671. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 20 см, $\angle B = 60°$. Довжину якого з катетів можна знайти? Знайдіть її.

672. На малюнку 407 коло вписано в чотирикутник $ABCD$ (дотикається до всіх його сторін). Доведіть, що $AB + CD = AD + BC$.



Мал. 407



Мал. 408

673. Прямокутник поділено на дев'ять прямокутників (мал. 408). Периметри трьох з них відомі, і їх вказано на малюнку. Знайдіть периметр зафарбованого прямокутника.

§ 26. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

У геометрії є задачі, пов'язані з геометричним місцем точок, яке залежно від умови задачі треба або знайти (побудувати), або використати для розв'язування задачі.

Геометричним місцем точок **площини називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.**

Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на дану відстань,* — коло, радіус якого дорівнює даній відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані,* — круг, радіус якого дорівнює даній відстані.

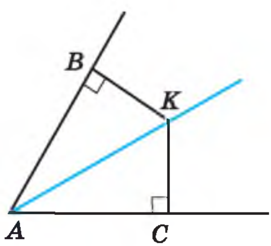
3. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області,* — бісектриса даного кута.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A і належить внутрішній області кута (мал. 409). Тобто перпендикуляри KB і KC, проведені із цієї точки до сторін кута, — рівні. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою), а $\angle BAK = \angle CAK$ (як відповідні кути). Отже, AK — бісектриса кута.

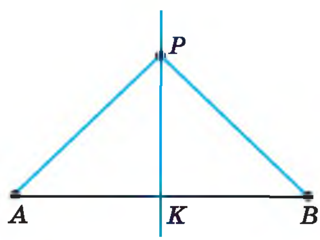
2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 23, теорема 1): $KB = KC$. ▲

Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області, є бісектриса даного кута.

4. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від кінців відрізка,* — серединний перпендикуляр до даного відрізка.



Мал. 409



Мал. 410

Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 410). Тоді $\triangle ABP$ — рівнобедрений з основою AB, а тому медіана PK цього трикутника є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 24, теорема 1): $PA = PB$. ▲

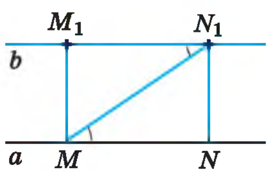
Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до даного відрізка.

5. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань,* — дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

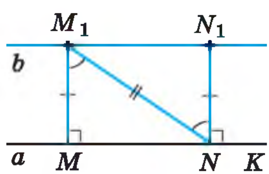
Д о в е д е н н я. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.

Нехай M_1 і N_1 — довільні точки прямої b. Проведемо перпендикуляри M_1M і N_1N до прямої a (мал. 411). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90°$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90°$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідки $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b — паралельна прямій a (мал. 412).



Мал. 411



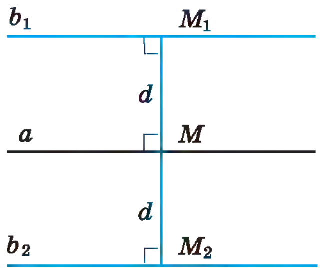
Мал. 412

Нехай M_1M і N_1N — перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (як внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за першою ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90°$. Також маємо $\angle N_1NK = 90°$. Але $\angle M_1N_1N$ і $\angle N_1NK$ — внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$. ▲

Отже, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

На малюнку 413 $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, між b_1 і a).

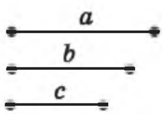


Мал. 413

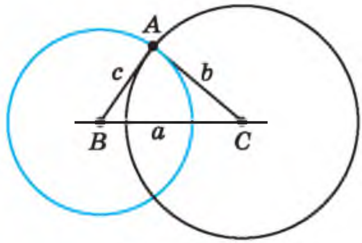
Суть методу геометричних місць у задачах на побудову полягає в такому. Нехай потрібно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, — фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, — фігура F_2. Шукана точка A належить як F_1, так і F_2, а тому є точкою їх перетину.

Розв'яжемо задачі на застосування методу геометричних місць точок.

Задача 1. Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.



Мал. 414



Мал. 415

Р о з в ' я з а н н я. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 414). Треба побудувати трикутник ABC, у якого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Точка A – вершина трикутника задовольняє дві умови:

1) знаходиться на відстані b від точки C, а тому належить колу із центром у точці C і радіусом b;

2) знаходиться на відстані c від точки B, а тому належить колу із центром у точці B і радіусом с.

Звідси побудова:

1) відкладаємо на деякій прямій відрізок $BC = a$ (мал. 415);

2) будуємо коло із центром у точці C і радіусом b (коло чорного кольору);

3) будуємо коло із центром у точці B і радіусом c (коло синього кольору);

4) одну з двох точок, що утворилися при перетині двох кіл, позначаємо точкою A;

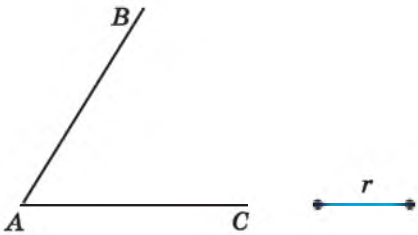
5) будуємо трикутник ABC.

Д о в е д е н н я того, що трикутник є шуканим, випливає з побудови.

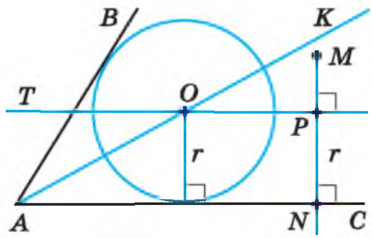
Задача 2. У даний кут вписати коло заданого радіуса.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай дано кут A (мал. 416), у який треба вписати коло радіуса r (тобто таке коло радіуса r, яке дотикалося б до сторін кута).

Спочатку знайдемо центр цього кола — точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) знаходиться на відстані r, наприклад від сторони AC кута.



Мал. 416



Мал. 417

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A — промінь AK (мал. 417);

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить усередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що знаходиться на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через точку P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC — паралельні, кожна точка прямої PT знаходиться на відстані r від прямої AC;

5) пряма PT перетинає промінь AK у точці O. Ця точка і є центром кола радіуса r, вписаного в кут A;

6) описуємо коло радіуса r із центром у точці O, воно дотикається до сторін кута.

Д о в е д е н н я того, що побудоване коло є шуканим, випливає з побудови.

Що називають геометричним місцем точок? Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної точки на задану відстань? У чому полягає суть методу геометричних місць точок? Як побудувати трикутник за трьома сторонами?

674. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на:
1) відстань 2 см; 2) відстань, не більшу за 2 см.

675. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на:
1) відстань a см; 2) відстань, не більшу за a см.

676. Накресліть довільний відрізок AB і знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

677. Побудуйте відрізок MN завдовжки 4 см і геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

678. Побудуйте тупий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

679. Побудуйте гострий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

680. Побудуйте трикутник зі сторонами $a = 8$ см, $b = 7$ см, $c = 5$ см.

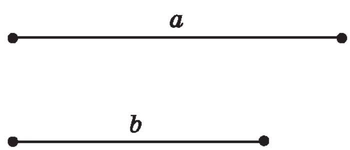
681. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CA = 7$ см.

682. Накресліть довільний трикутник ABC і побудуйте трикутник ABD такий, що дорівнює трикутнику ABC.

683. Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що йому дорівнює.

684. Накресліть довільний відрізок AB. Побудуйте рівносторонній $\triangle ABC$.

685. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона — відрізку b (мал. 418).



Мал. 418

686. Побудуйте $\triangle DEF$, якщо $DE = 6$ см, $\angle D = 40°$, $\angle E = 80°$.

687. Побудуйте трикутник NPT, якщо $NP = 4$ см, $\angle N = 50°$, $\angle P = 100°$.

688. Позначте точки P і F, відстань між якими 4 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з них на відстань 3 см.

689. Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться від даної прямої на відстані, що дорівнює даному відрізку a.

690. Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться на відстані 4 см від даної прямої.

691. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 4 см, а кут при вершині — 80°.

692. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при вершині — 100°.

693. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса r, що проходять через точку P.

694. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у даній точці M.

695. Дано основу AB рівнобедреного трикутника. Знайдіть геометричне місце точок — вершин рівнобедрених трикутників з основою AB.

696. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві дані точки — P і L.

697. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.

698. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

699. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

700. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

701. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

702. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до нього.

703. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом описаного кола.

704. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

4 **705.** Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

706. Дано пряму a і точку A. Знайдіть геометричне місце точок, що віддалені від прямої a на 3 см, а від точки A — на 2 см. Скільки розв'язків може мати задача залежно від розміщення точки A і прямої a?

707. Скопіюйте малюнок 419 у зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

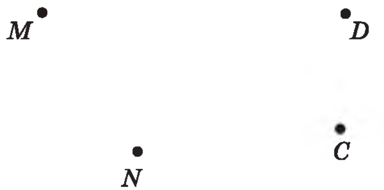
708. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до двох даних кіл, що мають зовнішній дотик.

709. Центр коло, радіус якого дорівнює 1,5 см, належить прямій a. Побудуйте коло радіуса 2 см, що дотикається до даних прямої і кола.

710. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки a (мал. 420). У якому місці потрібно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддалений від пунктів A і B?

711. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

712. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, що проведена до цієї сторони.



Мал. 419

Мал. 420

713. Дано кут 30°. Коло радіуса 5 см дотикається до сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

714. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших відносяться як 7 : 8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

715. Доведіть, що в рівних між собою трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, є рівними.

716. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза — 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

717. Прямокутну плитку шоколаду розламали на чотири прямокутних шматки. Один з них містить 6 квадратних частинок, другий — 15, а третій — 16. Скільки квадратних частинок у четвертому шматку цієї плитки?

§ 27. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Вивчаючи курс геометрії, ви неодноразово виконували різні геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспортир, косинець, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, які можна здійснити за допомогою лише двох інструментів: лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Давній Греції, тому їх прийнято вважати класичними інструментами.

Що можна зробити за допомогою двох вказаних інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через дану точку, і пряму, що проходить через дві дані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло із центром у даній точці і радіусом, що дорівнює даному відрізку. У деяких випадках замість кола потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що ніяких інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть з поділками) не дозволяється відкладати відрізок заданої довжини, не можна використовувати косинець для побудови перпендикулярних прямих тощо.

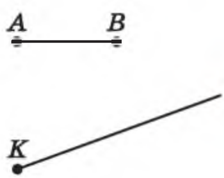
Розв'язати задачу на побудову означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі — довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

Іноді, для найбільш складних задач, потрібно виконати аналіз, тобто провести міркування, на основі яких і буде розв'язано задачу.

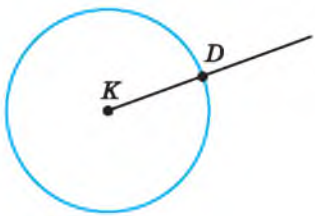
Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Побудова відрізка, що дорівнює даному

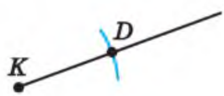
Задача 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює даному.



Мал. 421



Мал. 422



Мал. 423

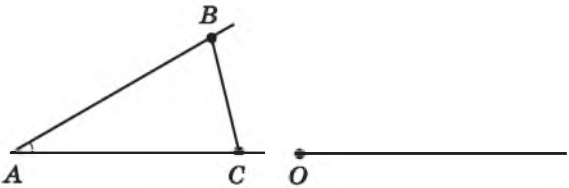
Р о з в ' я з а н н я. Зобразимо фігури, що дано в умові задачі: відрізок AB і промінь з початком у точці K (мал. 421). Побудуємо циркулем коло із центром у точці K, радіус якого дорівнює AB (мал. 422). Це коло перетне промінь у деякій точці D. Очевидно, що $KD = AB$. Тому KD — шуканий відрізок. ▲

Зауважимо, що замість кола можна було провести ту його частину (деяку дугу), яка б мала перетин з променем (мал. 423). Цю дугу ще називають *засічкою*.

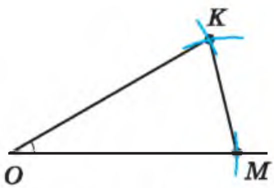
Побудова кута, що дорівнює даному

Задача 2. Від даного променя відкладіть даний кут.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай дано кут A і промінь з початком у точці O (мал. 424). Треба побудувати кут, що дорівнює куту A, так, щоб одна з його сторін збігалася з даним променем.



Мал. 424



Мал. 425

1) Позначимо на сторонах даного кута A дві довільні точки B і C (мал. 424).

2) Побудуємо трикутник OKM, що дорівнює трикутнику ABC, так, щоб $AB = OK$, $AC = OM$, $BC = KM$ (мал. 425).

3) Тоді $\angle KOM = \angle BAC$ (як відповідні кути рівних трикутників).

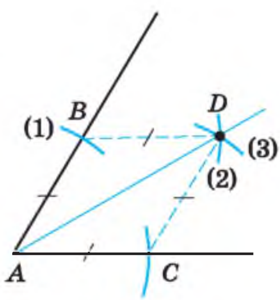
4) Отже, $\angle KOM$ — шуканий.

Д о в е д е н н я цього випливає з побудови, бо $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$. ▲

Побудова бісектриси заданого кута

Задача 3. Побудуйте бісектрису даного кута.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай дано $\angle A$, потрібно побудувати його бісектрису (мал. 426).



Мал. 426

1) Проведемо дугу кола довільного радіуса із центром у точці A (дуга (1) на мал. 426), яка перетинає сторони кута в точках B і C.

2) З точок B і C опишемо дуги таким самим радіусом (дуги (2) і (3)) у внутрішній області кута до їх перетину. Отримаємо точку D.

3) Проведемо промінь AD. Промінь AD — шукана бісектриса кута A.

Д о в е д е н н я. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), тому $\angle BAD = \angle CAD$ (як відповідні кути рівних трикутників), отже, AD — бісектриса кута A. ▲

Поділ даного відрізка навпіл

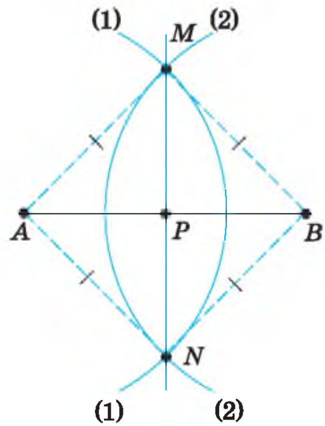
Задача 4. Поділіть даний відрізок навпіл.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай AB — даний відрізок, який треба поділити навпіл, тобто побудувати його середину.

1) З точки A радіусом циркуля, більшим за половину відрізка AB, опишемо дугу (1) (мал. 427).

2) З точки B таким самим радіусом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) у точках M і N.

3) Через точки M і N проведемо пряму MN. Пряма MN перетинає відрізок AB в точці P. P — шукана точка.



Мал. 427

Д о в е д е н н я. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$, а MP — бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB, тому вона є також медіаною. Отже, P — середина AB. ▲

Зауважимо, що пряма MN є серединним перпендикуляром до відрізка AB.

Побудова прямої, перпендикулярної до даної

Задача 5. Через дану точку M проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої a.

Р о з в ' я з а н н я. Задача має два випадки.

1. Нехай точка M належить прямій a.

1) На даній прямій a довільним радіусом циркуля відкладемо від точки M два рівних відрізки MK і ML (дуги (1) на мал. 428).

2) Із точок K і L радіусом, що дорівнює KL, опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину. Отримаємо точку B.

3) Проведемо пряму BM. Пряма BM — шукана.

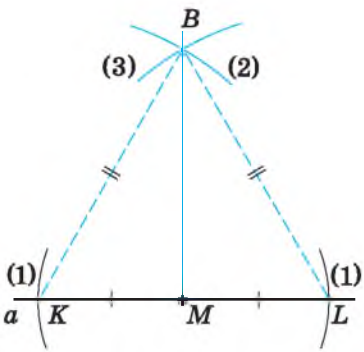
Д о в е д е н н я. $KL = KB = LB$, отже, BM — медіана рівностороннього трикутника BKL, тому вона є також і висотою. Отже, $BM \perp a$.

2. Нехай точка M не належить прямій a.

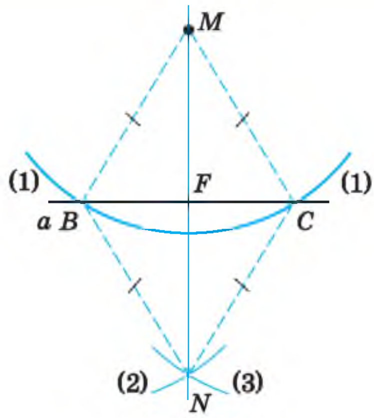
1) З точки M довільним радіусом циркуля (більшим за відстань від точки M до прямої a) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму a в точках B і C (мал. 429).

2) Із точок B і C тим самим радіусом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці N по інший бік від точки M.

3) Проведемо пряму MN. Пряма MN — шукана пряма.



Мал. 428



Мал. 429

Д о в е д е н н я. Нехай точка F — точка перетину прямих BC і MN. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BMN = \angle CMN$. MF — бісектриса рівнобедреного трикутника BMC, проведена до його основи. Тому MF є також і висотою. Отже, $MF \perp BC$, а тому $MN \perp a$. ▲

П р и м і т к а. У задачах цього параграфа для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі — лише лінійку без поділок і циркуль.

Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? ● Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? ● Які побудови можна виконати за допомогою циркуля? ● Що означає: розв'язати задачу на побудову? ● Як побудувати відрізок, що дорівнює даному? ● Як побудувати кут, що дорівнює даному? ● Як побудувати бісектрису даного кута? Як поділити даний відрізок навпіл? ● Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної?

718. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 430.

719. Проведіть довільний промінь та відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 431.

Мал. 430

Мал. 431

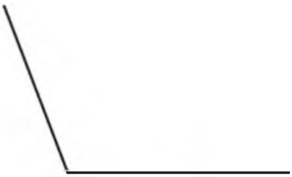
Мал. 432

720. Проведіть довільну пряму *m*, виберіть на ній точку *M* і опишіть коло із центром у точці *M*, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 432. У скількох точках коло перетнуло пряму?

721. Накресліть довільний відрізок *MN*. Побудуйте коло із центром у точці *M*, радіус якого дорівнює *MN*.

722. Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 433).

723. Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 434).



Мал. 433

Мал. 434

724. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, та без допомоги транспортира — його бісектрису.

725. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 110°, та без допомоги транспортира — його бісектрису.

726. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 435), та поділіть його навпіл.

727. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 436), та поділіть його навпіл.

Мал. 435

Мал. 436

728. Накресліть пряму *b* та позначте точку *M*, що їй не належить. Проведіть пряму *MN* перпендикулярно до прямої *b*.

729. Накресліть пряму *m* та позначте точку *P*, що їй належить. Проведіть пряму *PK* перпендикулярно до прямої *m*.

730. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

731. Накресліть гострокутний трикутник *ABC* та побудуйте його медіану *CP*.

732. Накресліть прямокутний трикутник *ABC* ($\angle C = 90°$). Побудуйте його медіану *CM* та бісектрису *AK*.

733. Накресліть прямокутний трикутник *KLM* ($\angle K = 90°$). Побудуйте його бісектрису *KP* та медіану *LT*.

734. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{3}{4}$ від побудованого відрізка.

735. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{1}{4}$ від побудованого відрізка.

3 **736.** На даній прямій a знайдіть точки, віддалені від заданої точки A: 1) на 4 см; 2) на відстань, більшу ніж 4 см; 3) на відстань, меншу ніж 4 см.

737. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

738. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 105°$.

739. Побудуйте $\triangle KLM$, якщо $KL = 6$ см, $KM = 4$ см, $\angle K = 80°$.

740. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при основі 70°.

741. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 5 см і впишіть у нього коло.

742. Побудуйте довільний трикутник та опишіть навколо нього коло.

743. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, — 4 см.

744. Побудуйте коло, радіус якого 4 см, позначте на цьому колі деяку точку A і проведіть через неї дотичну до кола — пряму b.

4 **745.** Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 105°$.

746. Не користуючись транспортиром, побудуйте кути 30° і 60°.

747. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 15°.

748. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого:
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;
2) $AB = BC = 4$ см, $\angle B = 150°$.

749. Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого:
1) $KM = 4$ см, $\angle K = 30°$, $\angle M = 45°$;
2) $KM = MP = 5$ см, $\angle M = 120°$.

750. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

2 **751.** Випишіть у порядку зростання внутрішні кути трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см.

3 **752.** Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за його основу. Чи можливо знайти довжину бічної сторони?

753. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

754. Два кола із центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, і кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть $\angle O_1AO_2$ і $\angle AO_1B$.

755. Розв'яжіть задачу та прочитайте прізвище першого президента незалежної України.

Промінь BK проходить між сторонами кута ABC. Знайдіть $\angle ABK$ і $\angle KBC$, якщо $\angle ABC = 120°$.

Умова	$\angle ABK$	$\angle KBC$
$\angle ABK$ на 20° менший від $\angle KBC$	А	В
$\angle ABK$ утричі більший за $\angle KBC$	У	К
$\angle ABK : \angle KBC = 3 : 5$	Р	Ч

30°	45°	50°	70°	75°	90°	30°

Домашня самостійна робота № 5 (§ 21 – § 26)

1. Знайдіть радіус кола, діаметр якого дорівнює 8 см.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 16 см; Г) 8 см.

2. З однієї точки до кола проведено дві дотичні. Відрізок однієї з дотичних дорівнює 7 см. Знайдіть відрізок другої дотичної.

А) 3,5 см; Б) 5 см; В) 7 см; Г) 14 см.

3. Скільки точок містить геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області?

А) жодної; Б) одну; В) дві; Г) безліч.

4. Радіус кола дорівнює 4 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює 3 см?

А) пряма перетинає коло у двох точках;

Б) пряма є дотичною до кола;

В) пряма не має з колом спільних точок;

Г) неможливо визначити.

5. Точка O — центр кола, MN — його хорда. Знайдіть $\angle MON$, якщо $\angle OMN = 70°$.

А) 20°; Б) 40°; В) 60°; Г) 70°.

6. Кола, радіуси яких 6 см і 2 см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між їх центрами.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 8 см.

7. Точка O — центр кола, AB — його діаметр, BC — його хорда, $\angle COA = 50°$. Знайдіть $\angle BCO$.

А) 25°; Б) 35°; В) 50°; Г) 60°.

8. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їх центрами дорівнює 14 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого.

А) 8 см і 4 см; Б) 9 см і 5 см;
В) 10 см і 6 см; Г) 11 см і 7 см.

9. Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в точці A, є...

А) відрізок; Б) пряма;
В) пряма без однієї точки; Г) коло.

10. З точки M, що лежить поза колом, проведено до кола дві дотичні MA і MB; де A і B — точки дотику, $\angle MBA = 60°$. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 10 см.

А) 10 см; Б) 15 см; В) 20 см; Г) 25 см.

11. Центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із серединою сторони в...

А) прямокутному трикутнику;
Б) гострокутному трикутнику;
В) тупокутному трикутнику;
Г) рівносторонньому трикутнику.

12. Три кола, радіуси яких 3 см, 4 см і 5 см, попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

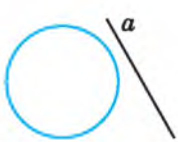
А) 22 см; Б) 23 см; В) 24 см; Г) 25 см.

Завдання для перевірки знань № 5 (§21 – §26)

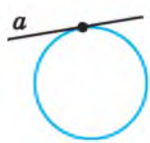
1. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.

2. На якому з малюнків 437–439 пряма a є дотичною до кола, а на якому — січною?

Мал. 437

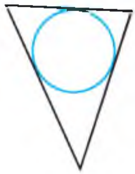


Мал. 438

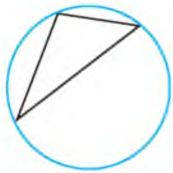


Мал. 439

3. На якому з малюнків 440–442 зображено коло, описане навколо трикутника, а на якому — вписане у трикутник?



Мал. 440



Мал. 441

Мал. 442

2 4. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN і хорду KL. Побудуйте за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку M.

5. Точка O — центр кола, AB — його хорда. Знайдіть $\angle OAB$, якщо $\angle AOB = 136°$.

6. Накресліть відрізок FP завдовжки 5 см. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

3 7. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їх центрами дорівнює 20 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них утричі більший за інший.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 55 мм, а кут при вершині — 50°.

4 9. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки завдовжки 5 см і 2 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Додаткові вправи

10. З точки A, що лежить поза колом, проведено до нього дві дотичні AB і AC, де B і C — точки дотику, $\angle BAC = 60°$. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 8 см.

11. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 120°.

Вправи для повторення розділу 4

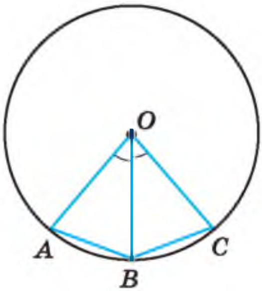
До § 21

1 **756.** Накресліть коло. Проведіть в ньому радіус, діаметр і хорду.

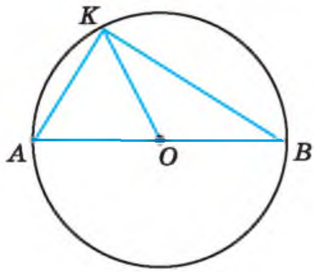
2 **757.** Дано коло із центром у точці O. Скільки спільних точок має коло з: 1) променем OK; 2) прямою OK?

758. У колі із центром O проведено хорди AB і BC (мал. 443). Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$. Доведіть, що $AB = BC$.

759. У колі із центром O проведено діаметр AB і хорди AK і KB (мал. 444). Знайдіть кути трикутника AKB, якщо $\angle KOB = 130°$.



Мал. 443



Мал. 444

760. Усі радіуси кола продовжили зовні кола на їх довжину. Яку лінію утворять їх кінці?

761. Розділіть хорду навпіл за допомогою лише косинця, якщо дано центр кола.

762. Знайдіть градусну міру кута між двома хордами, що виходять з однієї точки і дорівнюють радіусу.

763. AB — діаметр кола, K — деяка точка кола. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо найменший його кут у 4 рази менший від середнього за величиною кута.

764. У колі через середину радіуса OA перпендикулярно до нього проведено хорду MN. Знайдіть кути трикутника MON.

765. Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки завдовжки 7 см і 1 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

До § 22

766. Накресліть коло, радіус якого 2,5 см. Позначте на ньому точку L. Проведіть за допомогою косинця січну LK та дотичну LM до кола.

767. Нехай OK — відстань від центра кола O до прямої p, а r — радіус кола. Яким є взаємне розміщення прямої і кола, якщо:

1) $OK = 12$ см, $r = 14$ см;
2) $r = 7$ см, $OK = 70$ мм;
3) $OK = 2$ дм, $r = 18$ см;
4) $r = 32$ мм, $OK = 0{,}3$ дм?

768. Чи перетинаються дотичні до кола, що проходять через кінці його діаметра?

769. Пряма в точці A дотикається до кола із центром O. На дотичній по різні боки від точки A відкладено рівні відрізки AM і AN. Доведіть, що $OM = ON$.

770. Радіус кола ділить навпіл хорду, яка не є діаметром. Доведіть, що дотична, проведена через кінець даного радіуса, паралельна даній хорді.

До § 23

771. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

772. Накресліть кут 80°. За допомогою циркуля, косинця, транспортира та лінійки з поділками впишіть у цей кут коло так, щоб точка дотику до сторін кута знаходилася на відстані 2 см від його вершини.

773. Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині двох медіан трикутника. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

774. Вписане в рівнобедрений трикутник коло ділить бічну сторону у відношенні 2 : 3, починаючи від основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 70 см.

До § 24

775. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

776. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр описаного кола належить прямій, що містить висоту трикутника, проведену до основи.

777. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається із центром кола, вписаного в цей трикутник.

До § 25

778. Накресліть відрізок завдовжки 4 см. Побудуйте два кола, центрами яких є кінці заданого відрізка, такі, що:

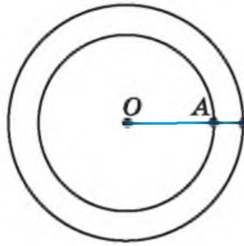
1) не перетинаються; 2) перетинаються.

779. Діаметр більшого з концентричних кіл ділиться меншим колом на три частини, що дорівнюють 3 см, 8 см і 3 см. Знайдіть радіуси кіл.

780. На малюнку 445 зображено концентричні кола, радіуси яких відносяться як 10 : 7. Знайдіть ці радіуси, якщо $AB = 12$ см.

781. При якому розташуванні двох кіл до них можна провести лише три спільні дотичні?

782. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 5 : 3. Розгляньте всі можливі випадки.



Мал. 445

До § 26

783. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

784. Побудуйте прямий кут і геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута, що належать його внутрішній області.

785. Чи буде пряма, що містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

786. Побудуйте коло радіуса r, що проходить через дві дані точки. Скільки розв'язків має задача?

787. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

788. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, радіус кожного з яких дорівнює r, що дотикаються до даної прямої.

789. На стороні трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від двох інших його сторін.

790. Знайдіть геометричне місце точок, що знаходяться на відстані, яка не перевищує 3 см від даної прямої.

791. Побудуйте коло, що проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a у даній точці A.

792. Побудуйте трикутник за його кутом, бісектрисою, проведеною із цього кута, і висотою, що проведена до прилеглої до цього кута сторони.

793. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та висотою, що проведена до цієї сторони.

794. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом між бічними сторонами і бісектрисою, проведеною з вершини кута при основі.

795. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета і гіпотенузи.

До § 27

796. Накресліть довільний кут A і побудуйте коло із центром у його вершині, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 446. Чи перетинає коло кожну зі сторін кута?

Мал. 446

797. Побудуйте відрізок, довжина якого удвічі більша за довжину відрізка на малюнку 446.

798. Накресліть за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює $80°$. Побудуйте (без транспортира) кут, що дорівнює даному, і його бісектрису.

799. Накресліть довільний трикутник і проведіть його бісектриси.

800. Накресліть гострокутний трикутник та проведіть його медіани. Упевніться в тому, що медіани перетнулися в одній точці.

801. Накресліть довільний тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює:

1) $\frac{1}{4}$ від накресленого кута; 2) $\frac{3}{4}$ від накресленого кута.

802. За двома даними кутами трикутника побудуйте кут, що дорівнює його третьому куту.

803. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.

804. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

805. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a та радіусом описаного кола R ($a < 2R$). Скільки розв'язків має задача?

806. Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, що лежить проти меншої з них.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1 **1.** Проведіть пряму m, позначте точку A, що належить прямій m, і точку B, що прямій m не належить. Виконайте відповідні записи.

2. Накресліть довільний відрізок MN та коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

3. У трикутнику CDE кут C — прямий. Як називають сторону DE цього трикутника? Як називають сторони CD і CE цього трикутника?

2 **4.** Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 119°. Знайдіть решту кутів. Знайдіть градусну міру кута між цими прямими.

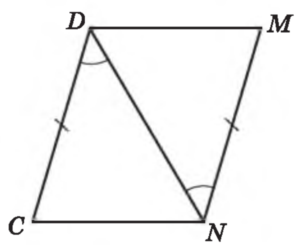
5. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 9 см. Знайдіть основу трикутника.

6. Дано: $DC = MN$, $\angle CDN = \angle DNM$ (мал. 447).
Довести: $\triangle CDN = \triangle MND$.

3 **7.** Один з кутів трикутника дорівнює 68°, а другий — на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 6$ см, $\angle A = 50°$, $\angle C = 70°$.

4 **9.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо зовнішні кути при вершинах цих кутів відносяться як 29 : 25.



Мал. 447

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1
Елементарні геометричні фігури та їх властивості

807. Дано відрізок AB. Позначте всі такі точки K на відрізку AB, для яких виконується співвідношення:

1) $BK = 3AK$; 2) $BK \geqslant 3AK$.

808. Градусна міра кута AOB дорівнює 120°. Побудуйте промінь OK, який проходить між сторонами даного кута так, що $3\angle AOK - 2\angle KOB = 10°$.

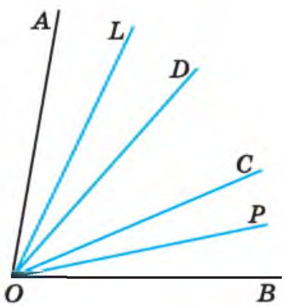
809. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

810. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного виконайте малюнок.

811. Точки A, B і C належать прямій a, причому точка B лежить між точками A і C. Відомо, що $AC < 1{,}9AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB.

812. На малюнку 448 $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP — бісектриси кутів AOD і COB. Порівняйте кути:

1) AOL і COP; 2) LOP і AOC.



Мал. 448

Розділ 2
Взаємне розміщення прямих на площині

813. Дано п'ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох з них проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

814. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:

1) тільки непарними цифрами;

2) тільки парними цифрами?

815. Знайдіть суміжні кути, якщо:

1) градусні міри цих кутів відносяться як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;

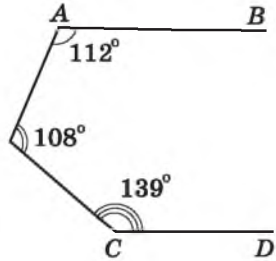
2) половина одного з них складає 40 % від іншого.

816. У якому з випадків утвориться більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи в трьох точках?

817. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ іншого дорівнює 90°.

818. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β. Доведіть, що $\alpha + \beta = 180°$.

819. Чи є паралельними прямі AB і CD (мал. 449)?



Мал. 449

820. Чи можна, використовуючи шаблон кута 27°, побудувати перпендикулярні прямі?

821. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший від суми трьох інших.

Розділ 3

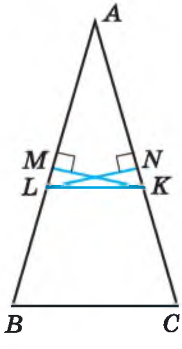
Трикутники. Ознаки рівності трикутників

822. Периметр трикутника на 10 см більший за одну із сторін, на 13 см — за другу і на 9 см — за третю. Знайдіть периметр трикутника.

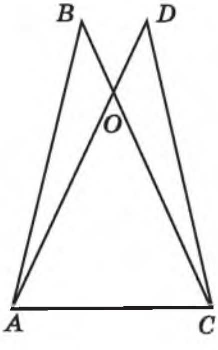
823. Точки M і N — середини сторін AB і AC трикутника ABC, $AB = AC$, $MK \perp AB$, $NL \perp AC$ (мал. 450). Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

824. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC, перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

825. На малюнку 451 $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо AO більша за AC на 30 см.



Мал. 450



Мал. 451

826. $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AB. Медіани AA_1 і BB_1 продовжено за точки A_1 і B_1 на відрізки A_1K і B_1L відповідно так, що $A_1K = AA_1$ і $B_1L = BB_1$. Доведіть, що $\angle ALC = \angle BKC$.

827. Доведіть, що з точки перетину бісектрис кожну зі сторін трикутника видно під тупим кутом.

828. Дві сторони і висота, що проведена до третьої сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, що проведена до третьої сторони другого трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні?

829. Дві сторони і медіана, що проведена до третьої сторони одного трикутника, дорівнюють відповідно двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони другого трикутника. Доведіть, що дані трикутники рівні.

830. Визначте вид трикутника (за кутами), якщо:

1) сума будь-яких двох його кутів більша за 90°;

2) кожний з кутів менший від суми двох інших.

831. У трикутнику ABC кут C — прямий. Сторону AB трикутника продовжено за точку A на відрізок $AP = AC$ і за точку B на відрізок $BT = BC$. Знайдіть суму градусних мір кутів CPT і CTP.

832. У трикутнику ABC $AC = BC$, D — точка перетину бісектрис трикутника, а точка O — центр кола, описаного навколо трикутника. Відрізок OD перетинає сторону AB трикутника в точці P і ділиться цією точкою навпіл. Знайдіть кути трикутника ABC.

833. Відрізки AC і BD перетинаються. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $BD > CD$.

834. У трикутнику ABC $AB > AC$, AM — медіана. Доведіть, що $\angle CAM > \angle MAB$.

835. Усередині рівностороннього трикутника ABC узято довільну точку K. Доведіть, що $AK < BK + KC$.

836. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів удвічі менший від другого, а сума гіпотенузи та меншого катета дорівнює a см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

837. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB і BC позначено точки K і L так, що $\angle LAK = 5°$, $\angle LCK = 10°$. Знайдіть $\angle LKC$.

838. У трикутнику ABC висоти AA_1 і BB_1 рівні й $AB_1 = CA_1$. Знайдіть $\angle C$.

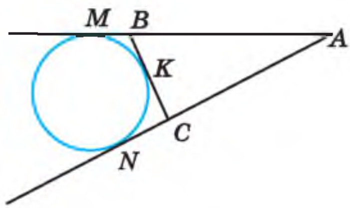
Розділ 4

Коло і круг

839. Відрізок BD — висота гострокутного трикутника ABC. Від вершини B на прямій BC відкладено відрізки BM і BN, довжини яких дорівнюють довжині сторони AB. На стороні AC від точки D відкладено відрізок DL, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, M, N, L лежать на одному колі.

840. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині 120° і бічною стороною, що дорівнює a см, описано коло. Знайдіть його радіус.

841. AM і AN — дотичні до кола (мал. 452), $AM = m$ см. Пряма BC дотикається до кола в точці K. Знайдіть периметр трикутника ABC.



Мал. 452

842. Два кола однакового радіуса, що дотикаються між собою, внутрішньо дотикаються до третього кола. Сполучивши центри трьох кіл, отримали трикутник, периметр якого 20 см. Знайдіть радіус більшого кола.

843. Нехай r — радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Доведіть, що $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

844. Два кола мають зовнішній дотик у точці P. Точки M_1 і M_2 — точки дотику спільної зовнішньої дотичної до кіл. Доведіть, що $\angle M_1PM_2 = 90°$.

845. За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут 54° на три рівні частини.

846. Знаючи суму і різницю двох кутів побудуйте їх.

847. Побудуйте $\triangle ABC$ за стороною BC, прилеглим до неї кутом B і сумою двох інших сторін $CA + AB$.

848. Побудуйте $\triangle ABC$ за двома кутами A і B та периметром P.

849. Дано пряму a і відрізок AB, що перетинає цю пряму. Побудуйте на прямій a точку C так, щоб пряма містила бісектрису трикутника ABC.

850. Побудуйте точку, яка лежить на даному колі й рівновіддалена від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків має задача?

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розділ 1

9. 2) 6; 3) 16. **10.** 2) 3; 3) 7. **12.** 6051. **26.** 17 см. **27.** 6 см. **28.** 1) $AC = 1{,}9$ дм; $BC = 5{,}7$ дм; 2) $AC = 5{,}2$ дм; $BC = 2{,}4$ дм. **29.** 1) $CM = 4{,}5$ см; $DM = 3{,}9$ см; 2) $CM = 2{,}1$ см; $DM = 6{,}3$ см. **30.** 10,1 см або 0,3 см; два розв'язки. **31.** 9,7 см або 4,7 см; два розв'язки. **49.** 1) 180°; 2) 90°; 3) 30°; 4) 120°. **50.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 150°; 4) 60°. **51.** 20°. **52.** 112°. **53.** 76°. **54.** 131°. **55.** $\angle PQB = 24°$; $\angle MQP = 96°$. **56.** $\angle CAN = 36°$; $\angle MAC = 50°$. **57.** 60°. **58.** 60°. **68.** 1) Два, або три, або чотири. 2) Від двох до $n + 1$ частин. **70.** 8 см. **72.** $\frac{a}{2}$ см. **77.** 1) 90°; 42°; 138°; 2) 30′; 3°; 20°. **78.** 1) 30°; 2) 148°. **79.** 1) 70°; 2) 146°. **80.** $\angle AOM = 72°$; $\angle MOB = 96°$.

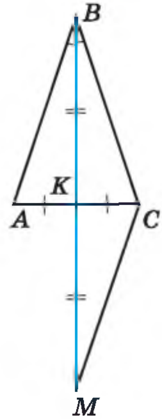
Розділ 2

94. 81° і 99°. **95.** 45° і 135°. **96.** 54° і 126°. **97.** $\angle A = 100°$; $\angle B = 75°$. **98.** 90°. **99.** 40° і 80°. **100.** 80° і 60°. **101.** 72° і 108° або 60° і 120°. **104.** 1) Кут; 2) пряма; 3) Евклід; 4) геометрія. **113.** 62°. **117.** 1) Усі по 90°; 2) 89°; 91°; 89°; 91°. **118.** 1) 8°; 172°; 8°; 172°; 2) усі по 90°. **119.** 1) 81°; 2) 67°. **120.** 60°. **121.** 100°. **122.** 50°. **123.** 180°. **125.** 18 см. **140.** 1) 65°; 2) 60°. **141.** 1) 50°; 2) 127°. **144.** 140°. **145** 110°. **150.** 72° і 108°. **160.** 3) 60°. **161.** 3) 50°. **167** 36°. **168.** Ні. **179.** $a \parallel b$. **180.** $b \parallel c$. **187.** 1) 190°; 2) 170°; 3) 170°. **188.** 1) 200°; 2) 160°; 3) 200°. **189.** Ні. **190.** Так. **191.** Ні. **192.** Ні. **196.** 100°. **197.** Так. **212.** 1) 82° і 98°; 2) 45° і 135°; 3) 75° і 105°. **213.** 1) 36° і 144°; 2) 86° і 94°; 3) 100° і 80°. **214.** $x = 70°$ на малюнку 155; $x = 65°$ на малюнку 156; $x = 129°$ на малюнку 157. **215.** $x = 50°$ на малюнку 158; $x = 110°$ на малюнку 159. **216.** Ні. **217.** Чотири кути по 40° і чотири кути по 140°. **218.** Чотири кути по 32° і чотири кути по 148°. **219.** 130°. **220.** 100°. **224.** Франко. **229.** 54° і 126°. **230.** 30° і 150°. **231.** 80° і 100°. **232.** 144°. **237.** 66°. **238.** 120°. **239.** 1) 36°; 144°; 36°; 144°; 2) 50°; 130°; 50°; 130°. **240.** 40°. **246.** 1) Так; 2) так. **256.** Ні. **257.** Так. **260.** 80° і 100°. **262.** 90°. **263.** 70°.

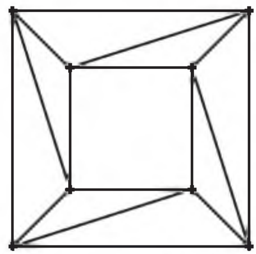
Розділ 3

272. 5 см; 15 см; 12 см. **273.** 12 дм; 10 дм; 18 дм. **276.** 12 дм; 16 дм; 24 дм. **277.** 16 см; 24 см; 32 см. **279.** 19 см. **281.** 141°. **282.** 5 чотирикутників. **292.** 1) Ні; 2) ні. **293.** Так, $AB = BC$. **294.** Так, $\angle N = \angle K$. **295.** 15 см. **296.** 8 см. **297.** 16 см. **298.** 30°; 60°; 90°. **319.** В к а з і в к а. Нехай точка O — точка перетину AB і MN. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$. **339.** 4 см; 4 см; 6 см. **340.** 12 см; 16 см; 16 см.

341. 7 дм; 14 дм; 14 дм. **348.** $AK = 28$ см; $BK = 20$ см. **349.** 1) Конус, сукно; 2) сектор; корсет. **369.** 60 см. **370.** 4 см. **371.** В к а з і в к а. Нехай BK — бісектриса і медіана трикутника ABC (мал. 453). Продовжте BK за точку K на відстань відрізка BK ($BK = KM$). Доведіть рівність трикутників ABK і CMK. **373.** 4 см; 7 см; 7 см. **374.** 9 см; 30 см; 30 см. **375.** 110 л. **390.** $\angle KAC = 56°$; $\angle BAK = 70°$. **408.** 30°. **409.** 35°. **410.** $\angle L = 60°$; $\angle N = 40°$; $\angle M = 80°$. **411.** $\angle C = 80°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 50°$. **414.** $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 75°$. **415.** 36°; 54°; 90°. **416.** 50°; 65°; 65°. **417.** 52°; 52°; 76°. **420.** 43°; 57°. **421.** 48°; 96°. **424.** 55°. **425.** 30°. **426.** 1) 12°; 12°; 156° або 12°; 84°; 84°; 2) 92°; 44°; 44°. **427.** 1) 28°; 28°; 124° або 28°; 76°; 76°; 2) 106°; 37°; 37°. **429.** 36°; 72°; 72° або 45°; 45°; 90°. **430.** 55°; 55°; 70° або 65°; 65°; 50°. **431.** 5 см. **434.** 20° або 100°. **454.** 1) 55°; 85°; 2) 28°; 112°. **455.** 1) 50°; 70°; 2) 30°; 90°. **456.** 62°; 62° і 56° або 62°; 59°; 59°. **457.** 138°; 21°; 21°. **459.** 3 : 1 : 2. **460.** 17 : 16 : 15. **462.** 30° і 60°. **463.** 4,2 см; 8,4 см; 10,2 см. **479.** 1) 31° і 59°; 2) 15° і 75°; 3) 36° і 54°. **480.** 1) 18° і 72°; 2) 37° і 53°; 3) 50° і 40°. **481.** 71°. **482.** 113°. **484.** 58° і 32°. **485.** 40° і 50°. **487.** 20 см; 10 см. **488.** 6 см. **489.** 35° і 55°. **490.** 72° і 18°. **492.** 32°; 52° і 96°. **493.** 24 см. **494.** Мал. 454. **501.** Ні. **502.** 27 см. **503.** 5,7 см або 6,7 см. **504.** 1) Так; 2), 3) ні. **505.** 1), 2) Ні; 3) так. **506.** Ні. **507.** Ні. **508.** $\angle A = 39°$; $\angle B = 117°$; $\angle C = 24°$. **510.** 1) Так; 2) ні. **514.** 10 см; 20 см; 16 см. **515.** $AB = 5$ см; $BC = 8$ см; $AC = 7$ см. **518.** Ні. **519.** 18 см. **530.** Так. **531.** 24 см; 32 см; 32 см. **539.** $AC = b - a$, $P = a + b$. **546.** 35°. **547.** 48°; 72°. **548.** 60°. **549.** 82°; 48°. **550.** 1) 30°; 2) 70°. **551.** 1) 80°; 2) 32°. **554.** 1) Так; 2), 3) ні. **555.** 108°. **557.** 40°; 56°; 84°. **558.** 100°; 40°; 40°. **564.** 27°; 63°. **565.** 30° і 60°. **566.** 10 см. **567.** 45°. **568.** 16 см. **569.** $2a$ см. **570.** 20 см; 10 см. **573.** 4 см і 13 см. **574.** Ні. **575.** 1) 4 см або 7 см; 2) 5 см; 3) 12 см. **576.** 9 см; 21 см; 21 см.

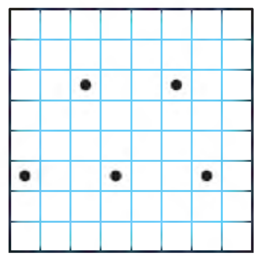


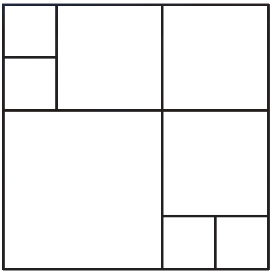
Мал. 453


Мал. 454

Розділ 4

593. 16°. **594.** 36°. **595.** 1) Безліч; 2) дві. **596.** 10 см. **597.** 9 см. **600.** 2 см і 3,5 см. **602.** 135°. **604.** 16. **615.** 41°. **616.** 106°. **617.** 60°. **618.** 7 см. **620.** 12 см. **621.** Мал. 455. **633.** $AP = AF = 7$ см; $BP = BM = 1$ см; $CM = CF = 5$ см. **634.** 10 см; 12 см; 14 см. **635.** 20 см. **636.** 38 см. **638.** 9°.


Мал. 455



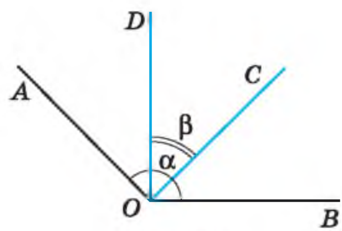
Мал. 456

639. Не обов'язково, див. мал. 456. **645**. 1), 2) Безліч; 3) одне. **655**. 8 см. **663**. 8 дм і 20 дм. **664**. 6 см і 9 см. **665**. 1) Зовнішній дотик кіл; 2) кола не перетинаються; 3) внутрішній дотик кіл; 4) кола перетинаються. **666**. 1) Кола не перетинаються; 2) внутрішній дотик кіл; 3) кола перетинаються; 4) зовнішній дотик кіл. **669**. 2 см; 3 см; 5 см. **670**. 40 см. **673**. 17. **691**. Вказівка. Знайдіть кут при основі трикутника. Для цього побудуйте даний кут, суміжний з ним, і поділіть останній навпіл. **692**. Див. вказівку до задачі 722. **707**. Вказівка. Шукана точка — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків MN і CD. **708**. Вказівка. Нехай дано кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких r_1 і r_2, а необхідно побудувати коло радіуса r, що дотикається до даних. Побудуйте кола із центрами в точках O_1 і O_2, радіуси яких $r_1 + r$ та $r_2 + r$ відповідно. **710**. Вказівка. Шукана точка — точка перетину серединного перпендикуляра до AB та прямої a. **713**. 10 см. **714**. 92°. **716**. 15 см і 45 см. **717**. 40. **746**. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів удвічі менший від гіпотенузи. **752**. Так, вона дорівнює 9 см. **753**. 1 : 2. **754**. $\angle O_1AO_2 = 60°$; $\angle AO_1B = 120°$. **759**. $\angle AKB = 90°$; $\angle KBA = 25°$; $\angle KAB = 65°$. **762**. 120°. **763**. 18°; 72°; 90°. **764**. 30°; 30°; 120°. **765**. 1,5 см. **768**. Ні. **774**. 20 см; 25 см; 25 см. **779**. 4 см; 7 см. **780**. 40 см; 28 см. **781**. Зовнішній дотик двох кіл. **782**. 10 см і 6 см або 40 см і 24 см.

Задачі підвищеної складності

808. Вказівка. $\angle AOK = 50°$. **811**. $BC < AB$. **812**. 1) $\angle AOL = \angle COP$; 2) $\angle LOP = \angle AOC$. **814**. 1) Так, наприклад, 1° і 179°; 2) ні. **815**. 1) 108° і 72°; 2) 80° і 100°. **816**. Однаково, по 6. **817**. 60° або $\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}$. **818**. Розв'язання. Нехай дано тупий $\angle AOB = \alpha$ (мал. 457). $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle COD$ — гострий, $\angle COD = \beta$.

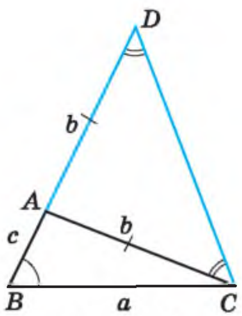
1) $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$;
$\angle AOD = 90° - \beta$.
2) $\angle BOC = \angle DOB - \angle DOC$;
$\angle BOC = 90° - \beta$.
3) $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$.
Тоді $\alpha = 90° - \beta + \beta + 90° - \beta$, звідки $\alpha + \beta = 180°$, що й треба було довести.



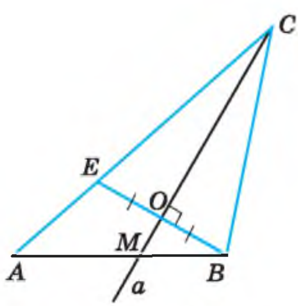
Мал. 457

819. Ні. **820**. Так. **821**. 80°; 100°; 80°; 100°. **822**. 16 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай a см, b см, c см — сторони трикутника, а P см — його периметр. $P = a + b + c$. За умовою $P - a = 10$, $P - b = 13$, $P - c = 9$. Маємо $a + b + c - a = 10$, тобто $b + c = 10$. Аналогічно $a + c = 13$, $a + b = 9$. Маємо систему: $\begin{cases} b + c = 10, \\ a + c = 13, \\ a + b = 9. \end{cases}$ Склавши почленно всі три рівняння, одержимо: $2a + 2b + 2c = 32$; $2(a + b + c) = 32$; $a + b + c = 16$. Отже, периметр трикутника дорівнює 16 см. **824.** $90 - \frac{\alpha}{2}$. **825.** 90 см. Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle CDA$, то $BC = AD$. 2) $CO = BC - BO$, $AO = AD - DO$. Але $BC = AD$, $BO = DO$, тому $AO = OC$. 3) Позначимо $AO = OC = x$ см, тоді $AC = (x - 30)$ см. 4) Периметр $P_{\triangle ABC} = 100$ см. Маємо: $AB + BC + CA = 100$, $AB + BO + OC + CA = 100$, $40 + 10 + x + x - 30 = 100$. Звідси $x = 40$ (см). 5) $P_{\triangle AOC} = x + x + x - 30 = 3x - 30 = 3 \cdot 40 - 30 = 90$ (см). **830.** 1) Гострокутний; 2) гострокутний. **831.** 45°. **832.** 36°, 36°, 108°. **835.** В к а з і в к а. Розгляньте трикутники AKC і BKC. **836.** $\frac{a}{3}$ см. **837.** 85°. **838.** $\angle C = 60°$. В к а з і в к а. $\triangle ACA_1 = \triangle BAB_1$ (за двома катетами). **839.** В к а з і в к а. Розгляньте коло із центром у точці B, радіус якого BA. **840.** a см. **841.** $2m$ см. Р о з в ' я з а н н я. За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо $AN = AM = m$ см, $BM = BK$ і $CK = CN$. Нехай P см — периметр трикутника ABC. Тоді $P = AB + BC + CA = AB + BK + KC + CA = AB + BM + CN + CA = (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = m + m = 2m$ (см). **842.** 10 см. **845.** В к а з і в к а. Оскільки $54° \cdot 3 = 162°$, то можна побудувати кут 18° ($18° = 180° - 162°$). **847.** В к а з і в к а. Побудуйте $\triangle BCD$, у якого $\angle DBC = \angle B$, $BD = AB + AC$ (мал. 458). Тоді точка A визначається з умови $\angle ADC = \angle ACD$. **848.** В к а з і в к а. Слід розглянути $\triangle CMN$, у якого $MN = P$, $\angle M = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle N = \frac{1}{2}\angle B$. **849.** В к а з і в к а. Нехай пряма a перетинає AB у точці M. Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 459). Шукана точка C є точкою перетину прямих a і AE. **850.** Жодного; один або два розв'язки.



Мал. 458



Мал. 459

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	В	Г	В	А	Г
2	Г	Б	Г	Б	А	В	В	Б	А	В	Б	Г
3	Б	Б	Б	Г	В	В	Г	А	А	Г	Г	Б
4	В	А	В	Б	Г	Г	Б	Г	А	Б	А	В
5	Б	В	Г	А	Б	Б	А	Б	В	В	А	В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК